

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, BAND 15, HEFT 8, DEZEMBER 1932

## *Zur Berechnung von Strahlungsempfängern*

*Von Johannes Fischer*

(Mit 5 Figuren)

**Inhalt:** § 1. Begriffsbestimmungen. Ziel der Arbeit. — § 2. Frühere Arbeiten. — § 3. Differentialgleichung des Strahlungsempfängers, Gelungsbereich und Integration. — § 4. Besonderheiten von Bolometer und Thermoelement. — § 5. Empfindlichkeit und Bemessung einfacher Strahlungsempfänger (Bolometer, Thermoelemente, Thermoketten). — § 6. Der in der Mitte bestrahlte Empfänger. — § 7. Der allgemeine Strahlungsempfänger. Das Thermorelais.

### **§ 1. Begriffsbestimmungen. Ziel der Arbeit**

Zur Untersuchung von Licht- und Wärmestrahlungen aller Wellenlängen finden Thermoelemente und Bolometer Anwendung. Das kennzeichnende Konstruktionselement beider Arten von Meßwerkzeugen ist in seiner einfachsten Gestalt der gestreckte lineare metallische Leiter (Draht oder Bändchen, im folgenden häufig „Stab“ genannt). Die auf den Empfänger treffende Strahlung bringt eine Temperaturerhöhung hervor, die in der Mehrzahl der Fälle verhältnismäßig gering ist. Für das Bolometer kommt es bekanntlich auf die mittlere Temperaturerhöhung des Stabes an, für das Thermoelement auf die Temperaturerhöhung an der Stelle des Materialwechsels, der meist in der Mitte des Stabes liegt.

Bei einer Berechnung der Strahlungsempfänger, die das Ziel hat, über die Erkenntnis der physikalischen Vorgänge hinaus für den günstigsten Aufbau und die Konstruktion empfindlichster Empfänger Gesichtspunkte an den Tag zu stellen, verdient besonders beachtet zu werden, daß man in allen praktischen Fällen, Eichungsmessungen ausgenommen, keine genauere Kenntnis der physikalischen Eigenschaften und Zustände und der geometrischen Gestaltung des Strahlungssenders (Strahlers) hat; die Rechnung muß darum darauf ausgehen, möglichst weitgehende Ergebnisse *ohne* diese Kenntnisse zu vermitteln. Weiterhin muß untersucht werden, inwieweit die Empfänger für Wärme- und für Lichtstrahlung unter den gleichen Bedingungen stehen. Aus dieser Untersuchung ergibt sich an Hand eines allgemeinen Modells die grundlegende

Differentialgleichung, deren allgemeine Herleitung noch ausstand, und deren Geltungsbereich (§ 3). Ihre Integration (§§ 3, 4) läßt uns dann die Frage nach dem zweckmäßigen Aufbau zunächst einfacher Strahlungsempfänger beantworten (§ 5), woran sich besondere (§ 6) und sehr allgemein geartete Strahlungsempfänger (§ 7) anschließen.

## § 2. Frühere Arbeiten

Die bisherigen Beiträge zur Theorie der Strahlungsempfänger sind von geringer Anzahl; die wichtigsten sind wohl die von E. Warburg, G. Leithäuser und Ed. Johansen in einer Arbeit über Vakuumbolometer<sup>1)</sup> angestellten Berechnungen, und die diesen nahestehenden über Vakuumthermosäulen in einem Aufsatz von E. S. Johansen.<sup>2)</sup>

Eine der grundlegenden Voraussetzungen, die in beiden Abhandlungen ohne weitere Begründung an die Spitze der Berechnung gestellt wird, ist die Bedingung, daß der Wickelraum des benutzten Galvanometers eine konstante Größe habe. In diesem Falle wird bekanntlich die Stromempfindlichkeit des Galvanometers im Idealfall der Wurzel aus dem Galvanometerwiderstand proportional. Wenn dann z. B. Johansen im weiteren Verlauf seiner Rechnung den Höchstwert der Empfindlichkeit für den Fall findet, daß der Galvanometerwiderstand gleich dem Widerstande des Thermoelementes ist, so ist das lediglich eine unmittelbare Folge der genannten Festsetzung. In der Tat führt diese Beziehung unter allen Umständen zu dem Ergebnis, daß der Ausschlag für Gleichheit des Galvanometerwiderstandes mit dem Schließungswiderstand seinen Höchstwert erreicht; sie ist nämlich nichts anderes als eine besondere Formulierung des bekannten Satzes über Leistungsanpassung.<sup>3)</sup> — Mag man auch die Tatsache vernachlässigen, daß bei hohen Stromempfindlichkeiten diese Beziehung zwischen Empfindlichkeit und Widerstand des Galvanometers

1) E. Warburg, G. Leithäuser u. Ed. Johansen, *Ann. d. Phys.* **24**, S. 25 1907.

2) E. S. Johansen, *Ann. d. Phys.* **33**, S. 517. 1910.

3) Sei  $g$  der Galvanometerwiderstand,  $w$  der Schließungswiderstand, so ist die dem Galvanometer zugeführte Leistung  $N = \text{const} \cdot \frac{g}{(g+w)^2}$ ; nach obiger Aussage ist der Strom für die Einheit des Ausschlags  $J_1 = \frac{\text{const}}{\sqrt{g}}$ , der Ausschlag also  $\alpha = \frac{J}{J_1} = \text{const} \cdot \frac{\sqrt{g}}{g+w}$ . Somit ist  $\alpha$  proportional  $\sqrt{N}$ , Maximum für  $g = w$ .

bei konstantem Wickelraum wegen des Raumanteiles der Isolation nicht mehr zutrifft, so bleiben trotzdem praktische und grundsätzliche Bedenken: Mit einer derart einfachen und darum einschränkenden Annahme können naturgemäß sämtliche weiteren Eigenschaften des benutzten Stromanzeigers nicht zum Ausdruck gebracht werden; diese können aber häufig eine ebenso wichtige Rolle spielen, wie die Empfindlichkeit selbst, z. B. bei den Drehspulgalvanometern, Schwingungsdauer und Dämpfungszustand. Die Folgen der genannten Annahme auf diese und andere Eigenschaften werden aber häufig schwer oder gar nicht abschätzbar. Aber auch dessenungeachtet erscheint es grundsätzlich bedenklich, daß eine spezielle und nur eingeschränkt richtige Annahme über das benutzte Anzeigegerät grundlegend in die Berechnung der von diesem doch wesentlich unabhängigen Strahlungsempfänger eingeht: Nachdem feststeht, daß Strahlungsempfänger für normale Aufgaben auch zu normalen mechanischen und elektrischen Abmessungen führen, wird der Erbauer empfindlicher Empfänger diese nicht im Hinblick darauf entwerfen, daß der Wickelraum des verfügbaren Galvanometers konstant ist, sondern mit einziger Rücksicht darauf, wie er die Empfindlichkeit an sich möglichst hoch treiben kann, und erst danach aus der großen Anzahl bestehender oder konstruierbarer Anzeigegeräte jenes herausgreifen, das am besten paßt. — Da der Bolometerstab üblicherweise einen Zweigwiderstand einer Wheatstoneschen Brücke bildet, werden in der genannten Arbeit<sup>1)</sup>, in der Absicht, eine möglichst vorteilhafte Brückenschaltung zu erhalten, bestimmte Widerstandsverhältnisse für diese angenommen und als weitere Voraussetzung in die Berechnung eingeführt. Nach neueren Rechnungen<sup>2)</sup> sind die gewählten Widerstandsverhältnisse aber nicht mit einem Höchstwert der Empfindlichkeit verbunden und darum keine zweckmäßige Voraussetzung zur Berechnung des Strahlungsempfängers. Auch hier empfiehlt es sich nicht, Fragen der Anzeige mit Fragen des günstigsten Baues des Empfängers zu verquicken. — In der Berechnung der Temperaturerhöhung der Lötstelle des Thermoelementes, die zu Bestwertbedingungen führen soll, ersetzt Johansen<sup>3)</sup> für den metallisch abgeleiteten (Fourierschen) Wärmestrom den örtlichen Temperaturgradienten durch die Länge des Stabes, was physi-

1) E. Warburg, G. Leithäuser u. Ed. Johansen, a. a. O.

2) Eigenschaften der Wheatstoneschen Brücke, E. und M. 48. S. 1060. 1930, vom Verfasser.

3) E. S. Johansen, a. a. O., S. 519.

kalisch unzulässig ist und kein Maß für den abgeleiteten Wärmestrom bedeuten kann. — Diese und ähnliche Unstimmigkeiten haben unscharfe, oder anfechtbare Ergebnisse zur Folge: So tritt als allgemeines Ergebnis zutage<sup>1)</sup>, daß die Empfindlichkeit jedes Strahlungsempfängers (im Vakuum) mit der Wurzel aus der bestrahlten Fläche anwächst. Daß dieser Satz aber höchstens für bestimmte, eng umgrenzte Verhältnisse zutreffen kann, legen triviale Überlegungen nahe.

Unter diesen Umständen erscheint es nötig und angebracht, die Berechnung von Strahlungsempfängern auf eine allgemeinere Grundlage zu stellen.

### § 3. Differentialgleichung des Strahlungsempfängers, Geltungsbereich und Integration

Den Ausgang der Rechnung bildet zweckmäßig die Bedingung, daß bei Fehlen der Strahlung keine Wärmebewegung stattfinde, daß also alle beteiligten Körper sich auf derselben absoluten Temperaturhöhe  $\vartheta_0 = \text{const}$  befinden. Nur so besteht Eindeutigkeit zwischen Meßgröße und Wirkung. Die Enden des Stabes sollen also mit hinreichend großen Metallmassen verbunden sein, und weder diese, noch andere in der Umgebung des Stabes befindliche Körper dürfen unmittelbar, z. B. durch einfallende, am Empfänger vorbeigehende Strahlung, oder mittelbar, z. B. durch die Strahlung des erwärmten Empfängers, merklich erwärmt werden, wenn nicht die Reproduzierbarkeit der Messungen oder des Empfängers beeinträchtigt werden soll.

Es ist Sache der Konstruktion, diesen „Anwärmefehler“ zu unterdrücken.

Der Empfänger von der (Mantel-)Fläche  $f$  sei von einer beliebig gestalteten Hülle  $F$  umgeben, es



Fig. 1. Beispiel zur Berechnung  
der Strahlungsempfänger

sei  $F \gg f$ ; der  $p$ -te Teil der Oberfläche des Empfängers werde von Strahlung getroffen (meist ist genügend genau  $p = \frac{1}{2}$ , z. B. Draht oder Bändchen bei paralleler Strahlung), vgl. die Veranschaulichung Fig. 1.

Die Temperaturerhöhung jedes Elementes des Empfängers

$$(1) \quad \tau = \vartheta - \vartheta_0$$

1) E. Warburg, G. Leithäuser u. Ed. Johansen, a. a. O., S. 33; E. S. Johansen, a. a. O., S. 520.

ist nach Voraussetzung (§ 1) klein:

$$(2) \quad \tau \ll \vartheta_0.$$

Der Sender habe die absolute Temperatur  $\Theta$  (natürlich ist  $\Theta > \vartheta$ ); im betrachteten Frequenzbereich seien Emissions- und Absorptionsvermögen konstant; ein etwa vorhandenes, den Stab umgebendes Gas werde als diatherman betrachtet, und der Wärmeaustausch zwischen diesem und dem Stab erst später in die Überlegungen einbezogen (Stab im Vakuum). Die Differentialgleichung des örtlichen und zeitlichen Verlaufs der Erwärmung setzt für jedes Längenelement des Empfängers die Differenz aus Gewinn und Verlust an Strahlungsenergie der Änderung des Wärmestromes im Innern und der Steigerung von dessen Wärmeinhalt gleich:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\lambda q \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} dx dZ + c \delta q \frac{\partial \tau}{\partial Z} dx dZ \\ = C_\Theta p u (\Theta^4 - \vartheta^4) dx dZ - C_1 u (\vartheta^4 - \vartheta_0^4) dx dZ; \end{array} \right.$$

also im zunächst wichtigen stationären Zustand ( $\frac{\partial \tau}{\partial Z} = 0$ ):

$$(4) \quad -\lambda q \frac{d^2 \tau}{dx^2} = C_\Theta p u (\Theta^4 - \vartheta^4) - C_1 u (\vartheta^4 - \vartheta_0^4)$$

mit folgenden benutzten Zeichen und Einheiten:

$Z$  die Zeit in sec,

$x$  die Koordinate der Länge in cm,

$u$  der Umfang des Stabes in cm,

$q$  der Querschnitt des Stabes in  $\text{cm}^2$ ,

$l$  die ganze Länge des Stabes in cm,

$\lambda$  die Wärmeleitzahl des Stabes in  $\text{cal/cm sec}^{\circ}\text{C}$ ,

$c$  die spezifische Wärme des Stabes in  $\text{cal/g}^{\circ}\text{C}$ ,

$\delta$  die Dichte des Stabes in  $\text{g/cm}^3$ ,

$C_\Theta, C_1$  Strahlungsaustauschkonstanten in  $\text{cal/cm}^2 \text{ sec}^{\circ}\text{abs.}^4$ ,

$\Theta, \vartheta, \vartheta_0, \tau, p$  oben erklärt.

In Gl. (4) stellt das erste Glied der rechten Seite den Energiestrom zwischen Sender und Empfänger dar, wofür die Konstante  $C_\Theta$  wegen der unbekannten Natur des Strahlers (vgl. § 1) nicht genau bekannt ist, das zweite Glied ist der Energieaustausch zwischen Empfänger und umgebender Fläche, also überwiegend zwischen  $f$  und  $F$  (Fig. 1); hierfür gilt die wohlbekannte Beziehung zwischen der Strahlungszahl  $C$  des Empfängers, der Strahlungszahl  $C_F$  der Fläche  $F$  und der des vollkommen schwarzen Körpers  $C_s$ :

$$(5) \quad C_1 = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{f}{F} \left( \frac{1}{C_F} - \frac{1}{C_S} \right)} \quad .^1)$$

Unter unserer Voraussetzung  $f \ll F$  wird das meist ohnehin kleine zweite Glied des Nenners vernachlässigbar, somit

$$(6) \quad C_1 = C,$$

d. h. die Strahlungszahl des Empfängers allein ist maßgebend.

Weiterhin betrachten wir zunächst den *einfallenden Energiestrom*  $C_\Theta p u dx (\Theta^4 - \vartheta^4)$ : Es ist um so angenäherter  $\Theta^4 - \vartheta^4 \approx \Theta^4 - \vartheta_0^4$ , je kleiner die Temperaturerhöhung  $\tau = \vartheta - \vartheta_0$  [Gl. (1)] ist: je mehr  $\tau \ll \vartheta_0$  [Gl. (2)] gilt, um so weniger unterscheidet sich die wirkliche Einstrahlung von der bei verschwindend kleiner Temperaturerhöhung einfallenden. Um den Fehler zu schätzen, falls man diese mit jener verwechselt, bestimmt man die Zahlen

$$\gamma = \frac{\vartheta}{\Theta} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta_0};$$

damit ist die wirkliche Einstrahlung proportional  $\{1 - \gamma^4\}$ , und die Einstrahlung bei verschwindend kleiner Temperaturerhöhung proportional  $\{1 - \left(\frac{\gamma}{1 + \nu}\right)^4\}$ ; nun ist wegen  $\Theta > \vartheta$  der Wert  $\gamma^4$  meist beträchtlich kleiner als Eins, und unter unserer Voraussetzung  $\tau \ll \vartheta_0$  [Gl. (2)] stets  $\nu \ll 1$ , die beiden Größen also nicht wesentlich unterschieden.<sup>2)</sup>

Betrachtet man also

$$(7) \quad A = C_\Theta (\Theta^4 - \vartheta_0^4) = \text{const} \approx C_\Theta (\Theta^4 - \vartheta^4)$$

in erster Näherung als den in die Oberflächeneinheit eingestrahlten Energiestrom  $\left(\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}\right)$ , so wird aus Gl. (4) mit Gl. (6):

$$(8) \quad -\lambda q \frac{d^2 \tau}{dx^2} = A p u - C u (\vartheta^4 - \vartheta_0^4).$$

Wo die gezeigten Voraussetzungen für diese zweckmäßige Vernachlässigung fehlen, formt man Gl. (4) nach Einsetzen von Gl. (6) vernachlässigungs frei um:

1) Vgl. z. B. „Hütte“ I, S. 506, 507 (26. Aufl., 1931).

2) Sei z. B.  $\vartheta_0 = 291^\circ \text{ abs.}$ ,  $\tau = 1^\circ \text{ C}$ ,  $\Theta = 373^\circ \text{ abs.}$ , so ist  $\gamma = 0,7828$ ,  $\nu = 0,003425$ ; damit wird  $1 - \gamma^4 = 0,6244$  und  $1 - \left(\frac{\gamma}{1 + \nu}\right)^4 = 0,6289$ , der Unterschied  $\sim 8\%$ . Bei empfindlichen Strahlungsempfängern liegt dagegen die Temperaturerhöhung in der Größenordnung  $1/100^\circ \text{ C}$ .

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\lambda q \frac{d^2 \tau}{dx^2} = C_\theta p u (\Theta^4 - \vartheta^4) - C u (\vartheta^4 - \vartheta_0^4) \\ = C_\theta p u (\Theta^4 - \vartheta_0^4) - C u (\vartheta^4 - \vartheta_0^4) \left(1 + p \frac{C_\theta}{C}\right) \\ = A p u - C u (\vartheta^4 - \vartheta_0^4) \left(1 + p \frac{C_\theta}{C}\right). \end{array} \right.$$

Gegenüber Gl. (8) ist also lediglich das mit  $C$  behaftete Glied im Verhältnis  $\left(1 + p \frac{C_\theta}{C}\right)$  vergrößert. Wir können diesen Faktor schätzen, wenn, wie häufig, das Absorptionsvermögen der dem Strahler zugekehrten Seite des Empfängers groß genug ist: dann rechnet man bis auf wenige Prozent genau, wenn man die Untersuchung des Energiestromes eines Strahlbündels nach der ersten Absorption abbricht, und erhält für  $C_\theta$ , unabhängig von der geometrischen Gestaltung der Aufgabe,

$$C_\theta \approx \frac{C C'_\theta}{C_s}$$

( $C$  Strahlungszahl des Empfängers,  $C'_\theta$  des Senders,  $C_s$  des vollkommen schwarzen Körpers).<sup>1)</sup> Unter Beachtung des Kirchhoffschen Gesetzes

$$\frac{C'_\theta}{C_s} = \varepsilon_\theta$$

( $\varepsilon_\theta$  Absorptionsvermögen des Senders) wird damit

$$(10) \quad 1 + p \frac{C'_\theta}{C} \approx 1 + p \varepsilon_\theta;$$

der Grenzwert, der die möglichen praktischen Werte weit übertrifft, ist also  $1 + p$ .

Gl. (8) beschreibt also stets den stationären Temperaturverlauf bei einfallender Wärmestrahlung. In rein makroskopischer Betrachtungsweise wird dabei mit einem vom Strahler gelieferten Energiestrom  $A$  gerechnet, der in der Flächeneinheit der dem Strahler zugewandten Seite des Empfängers auftritt. In dieser Festsetzung sind aber irgendwelche Bedingungen über die Natur des Strahlers nicht enthalten. Als unabhängig von dieser kann daher Gl. (8) auf jedes Frequenzbereich, also ebensowohl auf Wärme- wie auf Lichtstrahlung Bezug haben, wenn nur die Strahlungseigenschaften des Empfängers wie des Senders in dem gegebenen Frequenzbereich entsprechender Weise eingeführt werden. Ihr Geltungsbereich erstreckt sich somit auf Empfänger jeder Art von Strahlung.

1) W. Nusselt, Gesundh.ingenieur 1918, S. 171; vgl. „Hütte“, a. a. O.

Die Gl. (8) stimmt formal mit der Gleichung überein, welche die stationäre Erwärmung des vom elektrischen Strom durchflossenen, linearen gestreckten Leiters beschreibt. Bei ähnlichen Ergebnissen kann darum auf diese ausführlich ausgearbeitete Theorie Bezug genommen werden (TTM.).<sup>1)</sup>

Wir wenden uns nun dem *verlorenen Energiestrom* zu, den wir mit Gl. (6) zu  $C u d x (\vartheta^4 - \vartheta_0^4)$  fanden. Indem wir  $C$  als konstant annehmen, setzen wir für den gewählten Frequenzbereich die Strahlung als grau voraus; dies trifft für die meisten technisch verwendeten Körper in weitem Umfang zu, so daß man setzen kann<sup>2)</sup>:

$$(11) \quad C = \varepsilon C_s.$$

Sind übrigens die dem Strahler zugewandten und die von ihm abgekehrten Oberflächenteile des Empfängers mit verschiedenen Absorptionsverhältnissen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  ausgerüstet (so häufig zur Erhöhung der absorbierten Energie und Verkleinerung des Strahlungsverlustes), so trägt man dem leicht Rechnung, indem man statt  $\varepsilon$  den Ausdruck  $\varepsilon_1 p + \varepsilon_2 (1 - p)$  benutzt.

Unter unserer Voraussetzung  $\tau \ll \vartheta_0$  [Gl. (2)] ist es bekanntlich häufig bequem, zu rechnen:

$$(12) \quad \vartheta^4 - \vartheta_0^4 = a \tau^3;$$

damit wird

$$(13) \quad C (\vartheta^4 - \vartheta_0^4) = a \varepsilon C_s \tau;$$

zusammenfassend sei gesetzt:

$$(14) \quad a \varepsilon C_s^4 = \sigma \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{ sec} \text{ }^\circ\text{C}}.$$

Weiterhin wird bekanntlich der Wärmeaustausch mit einem umgebenden Gas, der bisher noch nicht in die Überlegungen einbezogen war, mit Hilfe der „Wärmeübergangszahl“ der Temperatursteigerung  $\tau$  proportional gesetzt. Die mit dem Begriff der Wärmeübergangszahl verknüpften Schwierigkeiten dürfen als bekannt gelten; zahlenmäßig überwiegt sie den Wert  $\sigma$  wohl meistens. Im folgenden sei mit  $\sigma^*$  der gesamte Wärmeaustausch bei Anwesenheit eines umgebenden Gases, mit  $\sigma$  der bei Fehlen eines solchen gekennzeichnet;

1) J. Fischer, Theorie der thermischen Meßgeräte der Elektrotechnik, 1931 bei F. Enke, Stuttgart.

2)  $\varepsilon : s$ ; z. B. „Hütte“, a. a. O.

3) Dies hier um so eher, als dabei  $\vartheta_0 \approx \text{const}$  ist. Für den Faktor  $a$  vgl. z. B. Tabelle in „Hütte“, a. a. O., Schaubild z. B. in H. G röber, Wärmeübergang, Springer, Berlin 1926, S. 128, vgl. auch TTM., S. 22.

über die Eigenschaften der Wärmeübergangszahl und der Strahlungszahl vgl. TTM. II, 1.

Mit diesem Ansatz, Gl. (12), (13), (14), wird die Ausgangsgleichung (8) zu einer linearen Differentialgleichung, deren Koeffizienten als leidlich konstant angesehen werden können:

$$(15) \quad \lambda q \frac{d^2 \tau}{dx^2} - \sigma u \tau + A p u = 0.$$

Zur Integration werde der Ursprungspunkt  $x = 0$  in die Mitte der Länge  $l$  gelegt. Nach dem eingangs § 3 Gesagten gilt:

$$(16) \quad \text{für } x = \pm \frac{l}{2} \text{ ist } \tau = 0,$$

und in der Mitte ist der Wärmestrom stetig:

$$(17) \quad \text{für } x = 0 \text{ ist } \frac{d \tau}{dx} = 0.$$

Damit lautet das Integral der Gl. (15):

$$(18) \quad \tau = \frac{A p}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{Erf} x \sqrt{\frac{\sigma u}{\lambda q}}}{\operatorname{Erf} \frac{l}{2} \sqrt{\frac{\sigma u}{\lambda q}}} \right\}^0 \text{ C.1)$$

In der Mitte ( $x = 0$ ) ist die Übertemperatur  $\tau$  am größten und hat den Wert:

$$(19) \quad \tau_{\max} = t = \frac{A p}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{1}{\operatorname{Erf} \frac{l}{2} \sqrt{\frac{\sigma u}{\lambda q}}} \right\}.$$

Im folgenden tritt häufig als Kenngröße auf:

$$(20) \quad X = + \frac{l}{2} \sqrt{\frac{\sigma u}{\lambda q}} = \frac{l}{2} b,$$

wobei

$$(21) \quad b = + \sqrt{\frac{\sigma u}{\lambda q}}.$$

Mit der Funktion

$$(22) \quad H(X) = 1 - \frac{1}{\operatorname{Erf} X}$$

wird

$$(23) \quad t = \frac{A p}{\sigma} \cdot H(X).$$

1) Beispiel: Kurve 2...2 in Fig. 2.

Der Mittelwert der Übertemperatur über die Länge ist:

$$(24) \quad \tau_m = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \tau \, dx = \frac{A p}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{\Xi_g X}{X} \right\} {}^{\circ} \text{C.}$$

Mit der Funktion

$$(25) \quad K(X) = 1 - \frac{\Xi_g X}{X}$$

wird

$$(26) \quad \tau_m = \frac{A p}{\sigma} \cdot K(X).$$

$H(X)$  und  $K(X)$  sind steigende Funktionen; über weitere Eigenschaften, Grenzwerte und Verlauf, Tafel und Tabelle vgl. TTM. II, 3. Für hinreichend großes  $X$  (z. B. bei großem  $\sigma = \sigma^*$ ) wird  $H(X) \rightarrow 1$ ; dieser Wert ist mit weniger als 2% (als 5%) erreicht für  $X > 4,6$  ( $X > 3,7$ ), und außerdem  $K(X) \rightarrow 1 - \frac{1}{X}$ ; mit diesem Ausdruck rechnet man mit weniger als 2% (als 5%) Fehler schon bei  $X > 2,3$  ( $X > 1,8$ ). Für sehr kleines  $X$  verschwinden beide Funktionen. Das Verhältnis der mittleren Übertemperatur zu der in der Mitte kann übrigens in einem bemerkenswert weiten Bereich mit  $\frac{2}{3}$  in Rechnung gesetzt werden; Näheres TTM. II, 3.

#### § 4. Besonderheiten von Bolometer und Thermoelement

Beim Bolometer überlagert sich der Erwärmung durch Einstrahlung die Joulesche Erwärmung durch den Brückenstrom, die einen zu Gl. (18) völlig analogen Temperaturverlauf hervorbringt. Die Berechnung der gesamten Temperatur danach und mit TTM. IV bringt keinerlei Schwierigkeiten mit sich, doch besteht wenigstens solange, als durch die Stromwärme die Stoffwerte nicht wesentlich verändert werden, kein Anlaß dazu. Zudem muß diese Erwärmung stets eingeeicht werden.

Eine andere Schwierigkeit zeigt sich beim Thermoelement: dieses wird nicht aus dem bisher angenommenen, homogenen Stab gebildet, sondern es besteht aus zwei Stäben, die im allgemeinen verschiedene Konstanten (und Abmessungen) besitzen, welche einerseits aneinander stoßen, andererseits mit ihren freien Enden mit großen Massen in Verbindung stehen. Zur Berechnung dieser Aufgabe sei die Stoßstelle der Stäbe in den Punkt  $x = 0$  gelegt, der eine Stab erstrecke sich von  $x = -l_1$  bis  $x = 0$  (Gebiet 1), der andere von  $x = 0$  bis  $x = +l_2$  (Gebiet 2). Dann gelten simultan:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 q_1 \frac{d^2 \tau_1}{dx^2} - \sigma_1 u_1 \tau_1 + A_1 p_1 u_1 = 0 \\ \text{für } -l_1 \leq x \leq 0. \end{array} \right.$$

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 q_2 \frac{d^2 \tau_2}{dx^2} - \sigma_2 u_2 \tau_2 + A_2 p_2 u_2 = 0 \\ \text{für } +l_2 \leq x \leq 0. \end{array} \right.$$

Die vier Randbedingungen, die die Aufgabe eindeutig bestimmen, sind:

$$(29) \quad \text{für } x = -l_1 \text{ ist } \tau = 0,$$

$$(30) \quad \text{für } x = +l_2 \text{ ist } \tau = 0,$$

$$(31) \quad \text{für } x = 0 \text{ ist } \tau_1 = \tau_2,$$

$$(32) \quad \text{für } x = 0 \text{ ist } \lambda_1 q_1 \frac{d \tau_1}{dx} = \lambda_2 q_2 \frac{d \tau_2}{dx}.$$

Unter Benutzung der Abkürzungen:

$$(33) \quad b_1 = \sqrt{\frac{\sigma_1 u_1}{\lambda_1 q_1}}, \quad b_2 = \sqrt{\frac{\sigma_2 u_2}{\lambda_2 q_2}},$$

$$(34) \quad X_1 = l_1 b_1, \quad X_2 = l_2 b_2,$$

$$(35) \quad g_1 = \sqrt{\sigma_1 \lambda_1 u_1 q_1}, \quad g_2 = \sqrt{\sigma_2 \lambda_2 u_2 q_2},$$

$$(36) \quad D = \frac{A_1 p_1}{\sigma_1} \cdot H(X_2) - \frac{A_1 p_1}{\sigma_1} \cdot H(X_1),$$

lauten die Integrale der Gl. (27), (28):

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \frac{A_1 p_1}{\sigma_1} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{Cof} x b_1}{\operatorname{Cof} X_1} \right\} \\ + \frac{D}{1 + \frac{g_1 \operatorname{Cof} X_2}{g_2 \operatorname{Cof} X_1}} \left\{ \operatorname{Cof} x b_1 + \frac{\operatorname{Sin} x b_1}{\operatorname{Cof} X_1} \right\}. \end{array} \right.$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_2 = \frac{A_2 p_2}{\sigma_2} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{Cof} x b_2}{\operatorname{Cof} X_2} \right\} \\ - \frac{D}{1 + \frac{g_2 \operatorname{Cof} X_1}{g_1 \operatorname{Cof} X_2}} \left\{ \operatorname{Cof} x b_2 - \frac{\operatorname{Sin} x b_2}{\operatorname{Cof} X_2} \right\}. \end{array} \right.$$

Für  $\tau_1$  ist die laufende Koordinate  $x$  nur negativ, für  $\tau_2$  nur positiv zu führen. Sehr häufig ist  $u_1 = u_2$  und  $q_1 = q_2$ . Dafür wird  $\frac{g_1}{g_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1 \lambda_1}{\sigma_2 \lambda_2}}$ . — Je ähnlicher die Stäbe in ihren Abmessungen und Konstanten werden, um so kleiner wird die Größe  $D$  [Gl. (36)] und um so mehr kommt die Übereinstimmung  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  [Gl. (18)]. Besteht das Thermoelement aus

Stäben mit den gleichen Abmessungen und ähnlichen Konstanten  $\sigma$  und  $\lambda$ , so unterscheidet sich, wie man leicht am Beispiel sieht, in der Mehrzahl der Fälle der Wert der Übertemperatur in der Stoßstelle kaum von dem Höchstwert der

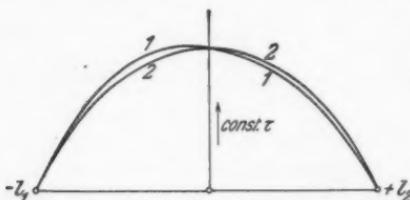


Fig. 2. Beispiel des Übertemperaturverlaufs bei einem Thermoelement: 1..1 wahrer Verlauf nach Gl. (35), (36); 2..2 Verlauf nach Gl. (18) mit Mittelwerten der Konstanten

ment mit der sehr viel bequemeren Gl. (18) und den aus ihr abgeleiteten Gleichungen, unter Einsetzen der Mittelwerte der Konstanten. Vgl. Fig. 2.

### § 5. Empfindlichkeit und Bemessung einfacher Strahlungsempfänger (Bolometer, Thermoelemente, Thermoketten)

Beim Thermoelement wird die an seinen Klemmen auftretende Spannung  $E$  über die Thermokraft je  $^{\circ}\text{C}:\beta$ , proportional einer zweckmäßig definierten Übertemperatur in der Mitte  $t$ :

$$(37) \quad E = \beta t = \frac{\beta A p}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{1}{\text{Ges } X} \right\} \text{ Volt.}$$

Beim Bolometer kommt es innerhalb des Gebietes, wo man die Meßschaltung und den Anzeiger dem Widerstandswert des Bolometerstabes anpassen kann, auf die relative Widerstandssteigerung an, die als eine Funktion der mittleren Übertemperatur  $\tau_m$  des Stabes angesehen werden kann; aus

$$r + \Delta r = r(1 + \alpha \tau_m)$$

bestimmt sie sich zu

$$(38) \quad \frac{\Delta r}{r} = \frac{\alpha A p}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{\text{Ges } X}{X} \right\}.$$

Bei der weiteren Aufgabe, ein Empfindlichkeitsmaß zu bestimmen, das den Einfluß der Stoffwerte und der Abmessungen erkennen läßt, wäre es nicht richtig, die Ausdrücke

ÜberTemperatur und auch nicht von der ÜberTemperatur in der Mitte eines Stabes, der die gleichen Abmessungen hat, wie das Thermoelement, aber dessen Konstanten  $\sigma, \lambda$  als Mittelwerte der Konstanten des Thermoelements gebildet sind. Man rechnet daher auch für das Thermoelement mit der sehr viel bequemeren Gl. (18) und den aus ihr abgeleiteten Gleichungen, unter Einsetzen der Mittelwerte der Konstanten. Vgl. Fig. 2.

Gl.  
häl  
Ab  
ein  
gra  
bil  
gef  
ein  
Str  
nat  
sch  
fall  
Ma  
Die  
zei  
gef  
der  
ein  
Ve  
wir  
nu  
und  
ste  
ohr  
spr  
nic  
dat  
Ist  
Ra  
We  
nu  
un  
him  
Em

ver  
kon  
sta  
ha  
em  
zei

Gl. (37), (38) etwa zu der gerade einfallenden Energie ins Verhältnis zu setzen, denn diese ist ja als *Apul* abhängig von den Abmessungen des Empfängers; man würde damit also lediglich ein relatives Maß für die Empfindlichkeit eine Art Wirkungsgrad erhalten. Vielmehr ist es zweckmäßig, das Verhältnis zu bilden zu der gesamten Strahlung  $Q \left( \frac{\text{cal}}{\text{sec}} \right) = \text{const}$ , die aufgefangen werden könnte, und die etwa als ein Spaltbild in einer bestimmten Ebene, oder als begrenztes Bündel paralleler Strahlen, oder in ähnlicher Weise zur Verfügung steht.

Dann sieht man aus Gl. (37), (38), daß die Empfindlichkeit natürlich proportional  $A, p, \beta$  bzw.  $\alpha$  ansteigt, ebenso etwas schneller als umgekehrt proportional  $\sigma$ , schließlich auch mit fallendem  $\lambda$  wächst. Die Abmessungen  $l, u, q$  haben *nur* nach Maßgabe der Funktionen  $H(X)$  Gl. (22), und  $K(X)$  Gl. (25) Einfluß. Die Bedeutung dieser Funktionen ist darin zu sehen, daß sie zeigen, daß mit Überschreiten eines bestimmten, in § 3 angeführten Wertes der Kenngröße  $X = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{\sigma u}{\lambda q}}$  ein Höchstwert der Empfindlichkeit als Grenzwert nahe erreicht wird, so daß eine weitere Vergrößerung von  $l$  oder  $u$ , oder eine weitere Verkleinerung von  $q$  nicht mehr vorteilhaft ist; von da an wird z. B. der Zuwachs an einfallender Energie im wesentlichen nurmehr zur Deckung der Strahlungsverluste aufgebraucht, und der elektrische Widerstand des Empfängers, der mit steigendem  $l$  und sinkendem  $q$  anwächst, wird nur vergrößert, ohne daß dem eine wesentliche Empfindlichkeitssteigerung entspräche. Es ist also sehr wohl der Fall möglich, daß es gar nicht besonders vorteilhaft ist, den Empfänger so auszudehnen, daß er die ganze zur Verfügung stehende Strahlung auffängt. Ist diese nicht begrenzt, so fehlen der Aufgabe ohnehin scharfe Randbedingungen; ist sie jedoch in der oben angedeuteten Weise beschränkt, so gelten unsere bisherigen Feststellungen nur insoweit, als der Empfänger durch Vergrößerung keine unbestrahlten Oberflächenteile erhält. Geht man darüber hinaus, so verliert man durch Erhöhung der Verluste an Empfindlichkeit (vgl. auch § 6).

Nach alledem gilt also hinsichtlich der Widerstandsverhältnisse, die ja in den Gl. (37), (38) nicht zum Ausdruck kommen, daß bei günstigen Konstruktionen extreme Widerstandswerte von selbst nicht auftreten. In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, daß man beim Entwurf von Strahlungsempfängern höchster Empfindlichkeit Meßschaltung und Anzeiger nicht aus dem Auge verlieren darf, vielmehr für eine

erfolgreiche Konstruktion z. B. beachten muß, zu welchen Eigenschaften der gewählte Typus des Anzeigers in seiner empfindlichsten Bauweise neigt. So ist es auch bei der Konstruktion eines Strahlungsempfängers möglich, daß er für die gewählte Meßschaltung oder den gewählten Anzeiger ungünstige Eigenschaften, etwa verhältnismäßig kleine Thermokraft bzw. Widerstandsänderung, verbunden mit vergleichsweise geringem Widerstandswert, besitzt: in diesem Falle zerlegt man den Empfänger durch Längsschnitte in einzelne Streifen, die hintereinander geschaltet werden. Mit der Anzahl der Streifen steigt dann z. B. der Widerstand quadratisch<sup>1)</sup>, beim Thermoelement die Spannung linear.

Schließlich ist noch darauf hinzuweisen, daß der zeitliche Verlauf von Zustandsänderungen, solange Gl. (13) und (15) gelten, gemäß bekannten Exponentialgesetzen erfolgt; ihre Zeitkonstante ist

$$(39) \quad T_W = \frac{c q \delta}{\sigma u} = \frac{c G}{\sigma u l} \text{ sec.}$$

Damit ist auch die Anzeigegeschwindigkeit gegeben; der Einfluß der Stoffwerte und Abmessungen ist ohne weiteres zu erkennen ( $G$  Gewicht in g).

### § 6. Der in der Mitte bestrahlte Empfänger

Sehr häufig werden Strahlungsempfänger so ausgeführt, daß nur ein mittleres Gebiet der Länge bestrahlt wird, an das sich nach beiden Seiten gleich lange, unbestrahlte Strecken anschließen; der bestrahlte und unbestrahlte Teil des Empfängers können sich auch in Abmessungen und Konstanten unterscheiden.

Zur Berechnung dieser Aufgabe sei die ganze Länge des Empfängers mit  $2l$ , die ganze Länge des bestrahlten Teiles mit  $2a$  bezeichnet, und der Ursprungspunkt der  $x$ -Achse in die Mitte der Länge gelegt, vgl. Fig. 3. Wir unterscheiden

1. Gebiet  $0 < x < a$ ; hier gilt

$$(40) \quad \frac{d^2 \tau_1}{dx^2} - \frac{\sigma_1 u_1}{\lambda_1 q_1} \tau_1 + \frac{A_1 p_1 u_1}{\lambda_1 q_1} = 0.$$

2. Gebiet  $a < x < l$ ; hier gilt

$$(41) \quad \frac{d^2 \tau_2}{dx^2} - \frac{\sigma_2 u_2}{\lambda_2 q_2} \tau_2 = 0.$$

1) Tatsächlich unwesentlich stärker, weil der Abstand zwischen den Streifen ein technisches Mindestmaß nicht unterschreiten kann; dieser bringt auch einen kleinen Empfindlichkeitsverlust.

Randbedingungen für die simultanen Gl. (40), (41) sind:

$$(42) \quad \text{für } x = 0 \text{ ist } \frac{d \tau_1}{dx} = 0,$$

$$(43) \quad \text{für } x = a \text{ ist } \tau_1 = \tau_2,$$

$$(44) \quad \text{für } x = a \text{ ist } \lambda_1 q_1 \frac{d \tau_1}{dx} = \lambda_2 q_2 \frac{d \tau_2}{dx},$$

$$(45) \quad \text{für } x = l \text{ ist } \tau_2 = 0.$$

Mit den bekannten Ab-

kürzungen

$$(21) \quad b = \sqrt{\frac{\sigma u}{\lambda q}},$$

Fig. 3. Zur Berechnung der in der Mitte  
bestrahlten Empfänger

für jedes Gebiet mit entsprechendem Index, und mit Hilfe einer Konstanten

$$(46) \quad \Omega = 1 + \frac{g_1}{g_2} \operatorname{tg} b_1 a \cdot \operatorname{tg} b_2 (l - a)$$

erhält man den Übertemperaturverlauf in beiden Gebieten zu

$$(47) \quad \tau_1 = \frac{A_1 p_1}{\sigma_1} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{Cof} b_1 x}{\Omega \cdot \operatorname{Cof} b_1 a} \right\},$$

$$(48) \quad \tau_2 = \frac{A_1 p_1}{\sigma_1} \left( 1 - \frac{1}{\Omega} \right) \left\{ \operatorname{Cof} b_2 (x - a) - \frac{\operatorname{Cin} b_2 (x - a)}{\operatorname{tg} b_2 (l - a)} \right\}.$$

An der Stoßstelle  $x = a$  geht bei einer Übertemperatur

$$(49) \quad \tau_a = \frac{A_1 p_1}{\sigma_1} \left( 1 - \frac{1}{\Omega} \right)$$

ein Wärmestrom der Größe

$$(50) \quad |Q_a| = \frac{A_1 p_1}{\sigma_1} \cdot \frac{g_1 \operatorname{tg} b_1 a}{\Omega}$$

über, der Wärmestromleitwert dort ist

$$(51) \quad \frac{|Q_a|}{\tau_a} = \frac{g_2}{\operatorname{tg} b_2 (l - a)} \cdot 1)$$

Für das Thermoelement ist die Übertemperatur in der Mitte  $x = 0$  maßgebend; die thermoelektrische Spannung wird

$$(52) \quad \beta t = \beta \frac{A_1 p_1}{\sigma_1} \left\{ 1 - \frac{1}{\Omega \cdot \operatorname{Cof} b_1 a} \right\};$$

1) Diese Gleichung in Übereinstimmung mit der Berechnung des einseitig erwärmten Stabes TTM. II, 10.

für das Bolometer kommt es auf die relative Widerstandssteigerung an; nach Gl. (38) ist diese

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \tau_{m_1} + \alpha_2 \tau_{m_2} = \frac{\alpha_1}{a} \int_0^a \tau_1 \, dx + \frac{\alpha_2}{l-a} \int_a^l \tau_2 \, dx \\ = \alpha_1 \frac{A_1 p_1}{\sigma_1} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{Tg} b_1 a}{\Omega \cdot b_1 a} \right\} \\ + \alpha_2 \frac{A_2 p_2}{\sigma_2} \frac{1 - \frac{1}{\Omega}}{b_2 (l-a)} \left\{ \operatorname{Cof} b_2 (l-a) - \frac{\operatorname{Cof} b_2 (l-a) - 1}{\operatorname{Tg} b_2 (l-a)} \right\}. \end{array} \right.$$

Beide Ausdrücke Gl. (52), (53) sollen möglichst groß werden; die Diskussion kann sich auf die Untersuchung der Größe  $\Omega$  Gl. (46) beschränken; mit wachsendem  $\Omega$  steigen die Ausdrücke Gl. (52), (53). Die 10 Einzelgrößen in

$$(46a) \quad \Omega = 1 + \sqrt{\frac{\sigma_1 \lambda_1 u_1 q_1}{\sigma_2 \lambda_2 u_2 q_2} \cdot \operatorname{Tg} a} \sqrt{\frac{\sigma_1 u_1}{\lambda_1 q_1} \cdot \operatorname{Tg} (l-a)} \sqrt{\frac{\sigma_2 u_2}{\lambda_2 q_2}}$$

folgen damit wenigstens gruppenweise: man hat nämlich die Argumente der  $\operatorname{Tg}$  so groß zu wählen, daß die  $\operatorname{Tg}$  ihrem Höchstwert 1 nahekommen (Argumente größer als 2,3), und die davor geschriebene Wurzel so zu gestalten, daß ihr Zähler den Nenner überwiegt. Beide Forderungen sind im allgemeinen nicht ohne weiteres vereinbar; kennt man aber noch einige weitere Bedingungen oder Begleitumstände, so ist eine günstige Konstruktion mit Gl. (46a) meist leicht bestimmbar. Stehen z. B. bei einer gewählten Konstruktion die  $\operatorname{Tg}$ -Argumente wesentlich über dem zur Erreichung des Höchstwertes der  $\operatorname{Tg}$  notwendigen Werte, etwa durch den großen Wert der Größen  $\sigma = \sigma^*$  beim Empfänger in Luft, so läßt sich aus Gl. (46a) leicht bestimmen, wie weit man durch Verändern der Faktoren der Wurzel im Sinn einer Vergrößerung des Wurzelwertes die Empfindlichkeit steigern kann, und wie weit man ohne Schaden die Länge des unbestrahlten Teiles  $l-a$  verkürzen kann. Der andere Fall, daß die Größen  $\sigma, \lambda, u, q$ , über die ganze Länge des Empfängers konstant sind:  $g_1 = g_2, b_1 = b_2$ , läßt sich ebenfalls leicht überblicken: aus Gl. (46a) folgt dann ohne weiteres der günstigste Wert der unbestrahlten Länge  $l-a$  und, bei hinreichender Freiheit hierfür, auch die bestrahlte Länge  $a$ .

Mit Hilfe der Ergebnisse dieses Abschnittes läßt sich nun auch die häufig vorliegende Frage beantworten, ob es bei einem als schmales Rechteck begrenzten Strahlenbündel (z. B. Spaltbild, Spektrallinie u. dgl.) höhere Empfindlichkeit bringt, wenn

man diesen schmalen „Strahlenstreifen“ mit einem einzelnen Empfängerstreifen auffängt, dessen ganze Fläche genau die ganze Strahlung auffängt, oder ob es besser ist, eine Anzahl (hintereinander geschalteter) Empfängerstreifen rechtwinklig zu dem Strahlenstreifen zu legen, die dann alle nur in ihre Mitten bestrahlt werden. Allgemeine Aussagen lassen sich hierfür natürlich kaum gewinnen, doch bildet man sich bei der Übersichtlichkeit der zu benutzenden Gl. (37), (38), (52), (53) dann leicht ein Urteil, wenn die Ausdehnung des Strahlenstreifens, einige technische Daten für den Empfänger und nicht zuletzt einige Angaben über Meßschaltung und Anzeiger vorliegen.<sup>1)</sup>

§ 7. Der allgemeine Strahlungsempfänger  
(Beispiel: Thermorelais)

Die vorhergehenden Abschnitte hatten Strahlungsempfänger unter technisch wichtigen Grenzbedingungen behandelt; diese und manche weiteren Aufgaben sind als Sonderfälle aus der allgemeinsten Aufgabe ableitbar, bei welcher der Strahlungsempfänger irgendwo einen bestrahlten Abschnitt seiner Länge besitzt; die unbestrahlten Stücke werden im allgemeinen nicht gleiche Länge haben; auch rechnet man zweckmäßig mit verschiedenen Werten der Größen  $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $u$ ,  $q$  in den sich so ergebenden drei Gebieten. Mit dieser Aufgabe kann man die Frage nach dem Übertemperaturverlauf vereinigen, falls der bestrahlte Abschnitt des Empfängers sich in konstanter oder auch veränderlicher Länge über die ganze Länge des Empfängers verschiebt, und weitere derartige Aufgaben. Sie alle vereinigen sich in dem in Fig. 4 angedeuteten Problem.

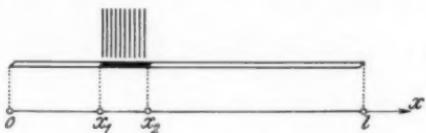


Fig. 4. Zur Berechnung der allgemeinen Strahlungsempfänger

Es gilt im ersten, unbestrahlten Gebiet  $0 < x < x_1$ :

$$(54) \quad \frac{d^2 \tau_1}{dx^2} - \frac{\sigma_1 u_1}{\lambda_1 q_1} \tau_1 = 0;$$

1) Verlangt z. B. die Natur des Anzeigers einen verhältnismäßig hohen Widerstand, und ist das Strahlenbündel ziemlich eng begrenzt, so kann eine Kette nur weise bestrahlter Empfänger dann vor dem Einzelempfänger vorteilhaft sein, wenn man für diesen zu extrem kleinen Materialstärken gezwungen würde.

im zweiten, bestrahlten Gebiet  $x_1 < x < x_2$ :

$$(55) \quad \frac{d^2 \tau_2}{dx^2} - \frac{\sigma_2 u_2}{\lambda_2 q_2} \tau_2 + \frac{A_2 p_2 u_2}{\lambda_2 q_2} = 0;$$

im dritten, unbestrahlten Gebiet  $x_2 < x < l$ :

$$(56) \quad \frac{d^2 \tau_3}{dx^2} - \frac{\sigma_3 u_3}{\lambda_3 q_3} \tau_3 = 0.$$

Zur eindeutigen Bestimmung der Zustände sind die folgenden Grenzbedingungen notwendig und hinreichend:

$$(57) \quad \text{für } x = 0 \text{ ist } \tau_1 = 0,$$

$$(58, 59) \quad \text{für } x = x_1 \text{ ist } \tau_1 = \tau_2 \quad \text{und} \quad \lambda_1 q_1 \frac{d \tau_1}{dx} = \lambda_2 q_2 \frac{d \tau_2}{dx},$$

$$(60, 61) \quad \text{für } x = x_2 \text{ ist } \tau_2 = \tau_3 \quad \text{und} \quad \lambda_2 q_2 \frac{d \tau_2}{dx} = \lambda_3 q_3 \frac{d \tau_3}{dx},$$

$$(62) \quad \text{für } x = l \text{ ist } \tau_3 = 0.$$

Daraus ergeben sich die sechs Integrationskonstanten in einem System von Gleichungen verknüpft, weil die Differentialgleichungen (54), (55), (56) simultan gelten. Man kann nur dann hoffen, die Integrale in übersichtlicher Form zu erhalten, wenn man von zweckmäßigen Abkürzungen Gebrauch macht. Unter Anwendung des schon häufig benutzten Ausdruckes

$$(21) \quad b = \sqrt{\frac{\sigma u}{\lambda q}},$$

für jedes Gebiet mit entsprechendem Index geltend, werden darum die folgenden Konstanten eingeführt:

$$(63) \quad \alpha = \sin b_1 x_1,$$

$$(64) \quad \beta = \sqrt{\frac{\sigma_1 \lambda_1 u_1 q_1}{\sigma_2 \lambda_2 u_2 q_2}} \cdot \cos b_1 x_1,$$

$$(65) \quad \gamma = \sin b_2 x_1,$$

$$(66) \quad \delta = \cos b_2 x_1,$$

$$(67) \quad \zeta = \sin b_2 x_2,$$

$$(68) \quad \eta = \cos b_2 x_2,$$

$$(69) \quad \varepsilon = \cos b_3 x_2 - \frac{\sin b_3 x_2}{\operatorname{tg} b_3 l},$$

$$(70) \quad \kappa = \sqrt{\frac{\sigma_2 \lambda_2 u_2 q_2}{\sigma_3 \lambda_3 u_3 q_3}} \left\{ \sin b_3 x_2 - \frac{\cos b_3 x_2}{\operatorname{tg} b_3 l} \right\},$$

$$(71) \quad \mu = \frac{1}{\operatorname{tg} b_3 l}.$$

Stellt man aus diesen Konstanten die folgenden algebraischen, stets von Null verschiedenen Ausdrücke her:

$$(72) \quad A = (\beta \delta - \alpha \gamma)(\zeta x - \varepsilon \eta) - (\beta \gamma - \alpha \delta)(\eta x - \varepsilon \zeta),$$

$$(73) \quad M = x(\beta \gamma - \alpha \delta) - \beta(\zeta x - \varepsilon \eta),$$

$$(74) \quad N = \beta(\eta x - \varepsilon \zeta) - x(\beta \delta - \alpha \gamma),$$

so läßt sich der Übertemperaturverlauf in den drei Gebieten in folgender Weise darstellen:

$$(75) \quad \tau_1 = \frac{A_2 p_2}{\sigma_2} \left( \frac{\gamma M + \delta N}{\beta A} \right) \sin b_1 x,$$

$$(76) \quad \tau_2 = \frac{A_2 p_2}{\sigma_2} \left\{ 1 + \frac{M}{A} \cos b_2 x + \frac{N}{A} \sin b_2 x \right\},$$

$$(77) \quad \tau_3 = \frac{A_2 p_2}{\sigma_2} \left( \frac{\zeta M + \eta N}{x A} \right) \{ \cos b_3 x + \mu \sin b_3 x \}.$$

Aus diesem Ergebnis lassen sich wohl die meisten Aufgaben aus der Berechnung von Strahlungsempfängern ableiten.

Als Anwendung sei der durch

$$(78) \quad b_1 = b_2 = b_3 = b$$

gekennzeichnete Sonderfall näher ausgeführt. Er trifft z. B. dann zu, wenn man mit über die Länge konstanten Werten von  $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $u$ ,  $q$  rechnen kann. Führt man diese Gl. (78) in (63...77) ein, so erhält man für den Übertemperaturverlauf in den drei Gebieten aus den allgemeinen Ausdrücken Gl. (75...77) die leichter zu übersehenden

$$(79) \quad \tau_1 = \frac{A_2 p_2}{\sigma_2} \left\{ \sin b x_2 - \sin b x_1 - \frac{\cos b x_2 - \cos b x_1}{\operatorname{tg} b l} \right\} \sin b x,$$

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_2 = \frac{A_2 p_2}{\sigma_2} \left\{ 1 - \cos b x_1 \cdot \cos b x \right. \\ \quad \left. + \left( \sin b x_2 - \frac{\cos b x_2 - \cos b x_1}{\operatorname{tg} b l} \right) \sin b x \right\}, \end{array} \right.$$

$$(81) \quad \tau_3 = \frac{A_2 p_2}{\sigma_2} \left( \cos b x_2 - \cos b x_1 \right) \left\{ \cos b x - \frac{\sin b x}{\operatorname{tg} b l} \right\}.$$

Ein naheliegendes Beispiel ist die Anwendung dieses Ergebnisses auf das sogenannte Thermorelais. Dies besteht bekanntlich aus einem gestreckten Thermoelement mit über die Länge konstanten Abmessungen  $u$ ,  $q$  [die Konstanten  $\sigma$ ,  $\lambda$  setzt man, mit der in Anschluß an Gl. (35, 36) erörterten Berechnung ebenfalls konstant über die Länge], und zwei inneren Kontaktstellen, einer bei  $\frac{1}{4}$ , einer  $\frac{3}{4}$  der ganzen Länge. Die Spannung ist dann der Differenz der Übertemperaturen an

beiden Stoßstellen proportional; sie verschwindet, wenn das Thermoelement in der Mitte der Länge, und natürlich, wenn es gar nicht bestrahlt wird, sie ist also zuerst eine steigende, dann eine fallende Funktion der Wanderung des Lichtstreifens aus der Mitte heraus. Man erhält die Spannung (und damit den Ausschlag am Sekundärgalvanometer) als Funktion der Lage des Lichtstreifens (z. B. seiner Mitte) aus der Differenz der Übertemperaturen für  $x = \frac{1}{4}l = \text{const}$  und  $x = \frac{3}{4}l = \text{const}$ , die je nach Lage des Lichtstreifens aus Gl. (79, 80, 81) zu berechnen sind. Die Größen  $x_1, x_2$  dieser Gleichungen sind bei

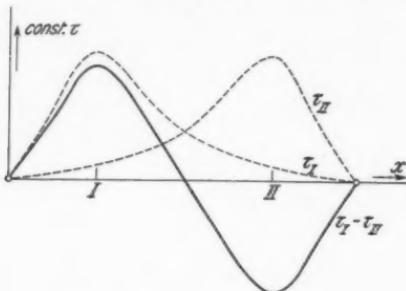


Fig. 5. Thermorelais, Beispiel

Annahme eines Lichtstreifens konstanter Breite  $x_2 - x_1 = \text{const}$  laufend von  $x_2 = 0$  bis  $x_1 = l$  zu verändern. Man kann dann den linearen Bereich des so gewonnenen Skalencharakters abschätzen.

Beispiel: Thermorelais im Vakuum aus Manganin und Konstantan, ganze Länge 1 cm, Dicke 1  $\mu$ , Breite 0,5 mm, damit  $b = 5,15 \text{ cm}^{-1}$ ; Lichtstreifenbreite  $x_2 - x_1 = 2 \text{ mm} = \text{const}$ . Kontaktstelle I bei  $x = 0,25l$ , Kontaktstelle II bei  $x = 0,75l$ . Fig. 5 zeigt den Übertemperaturverlauf an den beiden Kontaktstellen  $\tau_1, \tau_{II}$  und den Skalencharakter  $\tau_1 - \tau_{II}$  als Funktionen der Stellung der Mitte des Lichtstreifens. Hier kann man also mit gut linearer Skala bei Wanderung der Mitte des Lichtstreifens um rund  $\pm 0,2l$  aus der Mitte des Thermorelais heraus rechnen.

Karlsruhe, Juli 1932

(Eingegangen am 4. Oktober 1932)

**Längs- und Biegungsschwingungen  
von Turmalinplatten**  
**Von V. Petržilka**

(Mitteilung aus dem Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung)

(Mit 36 Figuren)

Bei der näheren Untersuchung der Schwingungen von Quarzplatten ergeben sich sehr komplizierte Schwingungsformen und Frequenzverhältnisse. Weil die elektrischen Achsen beim Quarz senkrecht zur optischen Achse stehen, sind die Quarzplatten normalerweise immer so geschliffen, daß die Plattenebene die optische Achse enthält. Nun ist aber in allen die optische Achse enthaltenden Ebenen der Elastizitätsmodul nicht konstant; trägt man nämlich vom Mittelpunkt aus die den jeweils betrachteten Richtungen entsprechenden Elastizitätsmoduln als Vektoren auf, so bekommt man eine Kurve, die ein Maximum und ein Minimum des Elastizitätsmoduls aufweist. Tatsächlich wurde von Meißner<sup>1)</sup> und neuerdings von Straubel<sup>2)</sup>, sowie von Wright und Stuart<sup>3)</sup> nachgewiesen, daß diese beiden Richtungen des maximalen und minimalen Elastizitätsmoduls bei Quarzplatten als Schwingungsrichtungen bevorzugt sind; so wurden die älteren Ergebnisse von Hund<sup>4)</sup>, der gezeigt hatte, daß eine kreisförmige Quarzplatte in ihrer Ebene in Schwingungen zweier verschiedener Frequenzen versetzt werden kann, bestätigt und erklärt.

Anders sind die Verhältnisse beim Turmalin, bei dem die optische Achse mit der elektrischen Achse zusammenfällt. Schleift man aus einem Turmalinkristall eine Platte senkrecht zur elektrischen (= optischen) Achse, so ist der Elastizitätsmodul in der Plattenebene konstant; man kann also erwarten, daß eine solche Platte sich in bezug auf die Schwingungen in ihrer Ebene ebenso wie eine isotrope Platte verhalten wird. Wählt man die Umrundung kreisförmig, so sollte man bei einer solchen Platte die Längsschwingungen, d. h. die Schwingungen in der Ebene der Platte, in Übereinstimmung mit der Loveschen<sup>5)</sup> Theorie (S. 497) finden, und die Biegungsschwingungen nach der Kirchhoffschen<sup>6)</sup> Theorie bekommen.

Beide Schwingungsarten wurden bei den Turmalinplatten in guter Übereinstimmung mit der Theorie gefunden.

1. **Elastische und piezoelektrische Eigenschaften der Turmalinplatten**

Turmalin gehört — ebenso wie Quarz — dem trigonalen System an, für welches die Elastizitätsfläche nach Voigt<sup>7)</sup> (S. 750) durch die Gleichung

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{E} = s_{11}(1 - \cos^2 \varphi)^2 + s_{33} \cos^4 \varphi + (s_{44} + 2s_{13}) \\ \quad \cdot \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) - 2s_{14} \sin^3 \varphi \cos \varphi \cos 3\vartheta \end{array} \right.$$

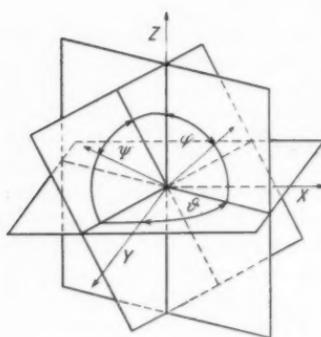


Fig. 1

gegeben ist. In dieser Gleichung bedeutet  $E$  den Elastizitätsmodul (Youngscher Modul), die Bedeutung der Winkel  $\vartheta$  und  $\varphi$  ist aus der Fig. 1 ersichtlich. Die Dehnungskoeffizienten haben nach Voigt<sup>8)</sup> für brasilianischen tiefgrünen Turmalin folgende Werte:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{11} = 3,985 \cdot 10^{-13} \\ s_{33} = 6,24 \cdot 10^{-13} \\ s_{44} = 15,13 \cdot 10^{-13} \\ s_{12} = -1,03 \cdot 10^{-13} \\ s_{13} = -0,163 \cdot 10^{-13} \\ s_{14} = 0,581 \cdot 10^{-13} \end{array} \right.$$

im cmgsec-System.

Die Poissonsche Konstante  $\sigma$  ist auf Grund der allgemeinen Gleichungen für die elastischen Konstanten der äolotropen Körper (Love<sup>5</sup>), S. 107) neuerdings von Wright und Stuart<sup>9)</sup> für Quarz berechnet und durch die Gleichung

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = - \left\{ s_{13} + \frac{1}{4}(s_{11} + s_{33} - s_{44} - 2s_{13}) \cos^2 \psi \sin^2 2\varphi \right. \right. \\ \quad + (s_{12} - s_{13}) \sin^2 \psi \sin^2 \varphi + \frac{1}{4}s_{14}[-\cos^2 \psi \sin 4\varphi \cos 3\vartheta \\ \quad + 2 \sin^2 \psi \sin 2\varphi \cos 3\vartheta \\ \quad + 2 \sin 2\psi \sin \varphi (2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sin 3\vartheta] \\ \quad \left. \left. \div [s_{11} + (s_{11} + s_{33} - s_{44} - 2s_{13}) \cos^4 \varphi \right. \right. \\ \quad \left. \left. - (2s_{11} - s_{44} - 2s_{13}) \cos^2 \varphi - 2s_{14} \sin^3 \varphi \cos \varphi \cos 3\vartheta] \right\} \right.$$

dargestellt worden. Dieselbe Gleichung gilt für alle Kristalle des trigonalen Systems, also auch für Turmalin; man braucht nur die entsprechenden Konstanten [Gl. (2)] einzusetzen.

Bei den Versuchen wurden Turmalinplatten von der Firma Zeiss, wie sie neuerdings von Straubel<sup>1)</sup> für die Steuerung kurzer und ultrakurzer Wellen entwickelt worden sind, verwendet. Alle Platten waren kreisförmig, senkrecht zur optischen Achse (Z-Achse) geschliffen, so daß ihre Ebene mit der XY-Ebene zusammenfällt. Weil in dieser Ebene  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ist, ist der Elastizitätsmodul konstant, und zwar ist

$$(4) \quad E = \frac{1}{s_{11}} = 2,51 \cdot 10^{12} \text{ (in cmgsec-System);}$$

die Abmessungen und die entsprechenden Wellenlängen der Dickenschwingungen der 6 benutzten Platten sind in der Tab. 1 zusammengestellt.

Tabelle 1

Turmalinplatte	Dicke mm	Radius a cm	Wellenlänge m
I	0,115	0,535	9,14
II	0,242	0,510	19,40
III	0,251	0,500	19,97
IV	0,494	0,515	39,80
V	0,500	0,702	40,05
VI	0,773	0,600	61,68

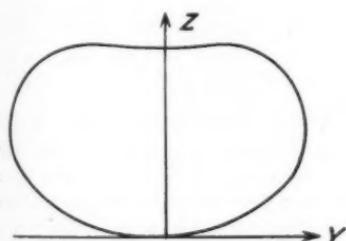


Fig. 2

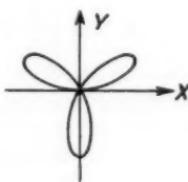


Fig. 3

Auch die Poissonsche Konstante  $\sigma$  hat in der Ebene der Platte nach Gl. (3) einen konstanten Wert

$$(5) \quad \sigma = - \frac{s_{12}}{s_{11}} = 0,258.$$

Die piezoelektrische Fläche wurde ebenso wie eine Elastizitätsfläche von Voigt<sup>2)</sup> (S. 867) berechnet. Fig. 2 zeigt die Schnittkurve dieser Fläche mit der YZ-Ebene. Die Fläche liegt nicht in ihrer ganzen Ausdehnung oberhalb der XY-Ebene, d. h. der Ebene der Turmalinplatte. Die kleine Durch-

dringung der Fläche macht sich im Maßstab der Fig. 2 gar nicht bemerkbar und ist besser in ihrer Schnittkurve mit der XY-Ebene zu übersehen (Fig. 3). Längs jeder Schleife dieser Kurve, die im 3-fachen Maßstab der Fig. 2 dargestellt ist, durchdringt die Fläche die XY-Ebene.

## 2. Längsschwingungen

### a) Theorie von Love

Um die Resultate der Theorie von Love an dieser Stelle in möglichst einfacher Weise zu reproduzieren, sind im folgenden die Grundgleichungen kurz zusammengestellt:

Love geht von dem Ansatz aus, daß die Spannungsrgebnanten  $T_1, T_2, S_1$  durch die Näherungsformeln

$$(6) \quad \begin{cases} T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma \frac{\partial v}{\partial y} \right), & T_2 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ S_1 = \frac{Eh}{1+\sigma} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases}$$

und die Bewegungsgleichungen in der Form

$$(7) \quad \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial y} = 2\varrho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = 2\varrho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

oder

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(1+\sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\varrho(1-\sigma^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{1}{2}(1-\sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(1+\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\varrho(1-\sigma^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases}$$

gegeben sind; darin bedeutet  $E$  den Elastizitätsmodul,  $\sigma$  die Poissonsche Konstante,  $\varrho$  die Dichte,  $2h$  die Dicke der Platte,  $u$  und  $v$  die Verschiebungskomponenten. Schon aus Gl. (8) ist ein wichtiges Resultat der Theorie zu ersehen, nämlich daß die Frequenz der Längsschwingungen unabhängig von der Dicke der Platte ist.

Unter der Annahme, daß die Flächendehnung  $p$  und die Drehung  $\varepsilon$  mit den Verschiebungskomponenten durch die Gleichungen

$$(9) \quad p = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 2\varepsilon = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

verknüpft sind, lassen sich die Gl. (8) in der Form

$$\frac{\partial p}{\partial x} - (1-\sigma) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\varrho(1-\sigma^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + (1-\sigma) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\varrho(1-\sigma^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

darstellen. Für den Fall der kreisförmigen Platte ist es am zweckmäßigsten, zu den Polarkoordinaten  $r, \Theta$  mit dem Ursprung im Mittelpunkt des Kreises überzugehen. Sind  $U, V$  die Projektionen der Verschiebung eines Punktes der Mittel- ebene auf den Radiusvektor und auf die zum Radiusvektor senkrechte Gerade, dann sind

$$(10) \quad u = U \cos \Theta - V \sin \Theta, \quad v = U \sin \Theta + V \cos \Theta,$$

$$(11) \quad p = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \Theta}, \quad 2\varepsilon = \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \Theta}.$$

Die zu irgendeinem Kreis  $r = \text{const}$  gehörigen Spannungs- resultaten  $T, S$  sind dann durch

$$(12) \quad \begin{cases} T = \frac{2Eh}{1-\sigma^2} \left[ \frac{\partial U}{\partial r} + \sigma \left( \frac{U}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \Theta} \right) \right], \\ S = \frac{Eh}{1+\sigma} \left[ \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \Theta} \right] \end{cases}$$

gegeben.

Die Schwingungsgleichungen (8) lauten schließlich

$$(13) \quad \mathcal{A}p = \frac{\varrho(1-\sigma^2)}{E} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad \mathcal{A}\varepsilon = \frac{2\varrho(1+\sigma)}{E} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$$

mit den Randbedingungen

$$(14) \quad T_{(r=a)} = 0, \quad S_{(r=a)} = 0$$

bei freiem Rande ( $a$  Radius der Randlinie, d. h. der Platte). Setzt man

$$(15) \quad \begin{cases} U = U_n(\cos n\Theta + \sin n\Theta) \cos \omega t, \\ V = V_n(\sin n\Theta - \cos n\Theta) \cos \omega t, \end{cases}$$

wobei  $U_n$  und  $V_n$  nur Funktionen von  $r$  sind, und schreibt man

$$(16) \quad \mathbf{x}^2 = \varrho(1-\sigma^2) \frac{\omega^2}{E}, \quad \mathbf{x}'^2 = 2\varrho(1+\sigma) \frac{\omega^2}{E},$$

dann ist

$$(17) \quad \begin{cases} p = A' J_n(\mathbf{x}r) (\cos n\Theta + \sin n\Theta) \cos \omega t, \\ \varepsilon = B' J_n(\mathbf{x}'r) (\sin n\Theta - \cos n\Theta) \cos \omega t, \end{cases}$$

wo  $A'$  und  $B'$  Konstanten bedeuten und  $J_n$  die Besselsche Funktion  $n$ -ter Ordnung bezeichnet; aus den Gl. (11) folgt, daß

$$(18) \quad \begin{cases} U = \left[ A \frac{d J_n(\mathbf{x}r)}{dr} + n B \frac{J_n(\mathbf{x}'r)}{r} \right] (\cos n\Theta + \sin n\Theta) \cos \omega t, \\ V = - \left[ n A \frac{J_n(\mathbf{x}r)}{r} + B \frac{d J_n(\mathbf{x}'r)}{dr} \right] (\sin n\Theta - \cos n\Theta) \cos \omega t \end{cases}$$

ist, wobei

$$A' = -A \mathbf{x}^2, \quad B' = B \mathbf{x}'^2$$

ist. Für die experimentellen Folgerungen müssen wir drei Arten von Schwingungen unterscheiden, die wir im weiteren als Schwingungstypen *A*, *B* und *C* bezeichnen wollen.

### b) Schwingungen des Typus *A*

Es können freie Schwingungen entstehen, bei denen  $V$  verschwindet und  $U$  von  $\Theta$  unabhängig ist; dann ist nach den Gl. (11) die Amplitudengleichung

$$(19) \quad U = A' J_1(\kappa r) \cos \omega t$$

und nach den Gl. (14) die Frequenzgleichung

$$\frac{d J_1(\kappa a)}{d a} + \frac{\sigma}{a} J_1(\kappa a) = 0$$

oder

$$(20) \quad J_0(\kappa a) = (1 - \sigma) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a}.$$

Bezeichnet man die Wurzeln dieser Gleichung mit  $x_m = \kappa_m a$ , so ist die Frequenz der Schwingungen des Typus *A* nach der Gl. (16) durch

$$(21) \quad f_m = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{x_m}{2\pi a} \sqrt{\frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)}} = \frac{A_m}{a}$$

gegeben, wenn man den Proportionalitätsfaktor mit  $A_m$  bezeichnet. Zu jedem Werte von  $x_m$  bzw.  $\kappa_m$  kann man ferner diejenigen Werte von  $r$  berechnen, die kleiner als  $a$  sind und Wurzeln von  $J_1(\kappa r)$  sind; diese Werte von  $r$  sind dann die Radien der Kreise, die auf der schwingenden Platte die Knotenlinien bilden (19).

Bei einer Turmalinplatte ist in der Ebene der Platte nach Gl. (5) die Poissonsche Konstante  $\sigma = 0,258$ , also die Wurzeln der Gl. (20) gleich

$$(22) \quad x_m = \kappa_m a = 2,02; 5,38; 8,57; 11,73; 14,88; \dots$$

Berechnet man die Radien für entsprechende Werte von  $m$ , so bekommt man

Tabelle 2

$m$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$
0	0				
1	0	0,712			
2	0	0,447	0,819		
3	0	0,326	0,597	0,865	
4	0	0,257	0,472	0,683	0,897

$a$ , der Radius der Platte, ist gleich 1 gesetzt.

Schwingungen dieser Art wurden an den Turmalinplatten bei den in der Tab. 3 zusammengestellten Frequenzen beobachtet. Die Turmalinplatte wurde auf eine metallische Platte, die als eine Elektrode diente, gelegt, die andere Elektrode wurde der Platte gegenübergestellt und die beiden Elektroden parallel zum Schwingungskreis eines kleinen, selbsterregten Senders (mit der Röhre Telefunken RE 134) geschaltet.

Tabelle 3

Platten	I	II	III	IV	V	VI
$f_0$ kHz	596	626	637	619	453	528
$f_1$ kHz	1562	—	1665	1627	1191	1382
$f_2$ kHz	2488	—	2642	2574	1875	2208

Die Figg 4—7 zeigen die Knotenlinien, die sich bei der Grundfrequenz ( $m = 0$ ) an verschiedenen Platten ausgebildet haben. Bei der Platte V und VI (Fig. 4) war das ein Knotenpunkt, wie die Theorie verlangt. Je dünner die Platte war, um so mehr Knotenkreise bildeten sich (Figg. 5—7), wobei die Platten an ihrer anderen Seite bei derselben Frequenz ein komplementäres Bild zeigten (Figg. 8—10). Dasselbe wurde auch bei der ersten Oberwelle ( $m = 1$ ) der Platte V und VI beobachtet (Figg. 11—14).

Weil die Oberwellen der Platten mit kleinem Durchmesser (Platte I, III, IV) in das Gebiet der Kurzwellen fallen, wo Oberwellen verschiedener Schwingungsarten dicht nebeneinander liegen, so daß es fast unmöglich ist, die richtige zu finden, wurden die höheren Oberwellen nur bei der Platte V weiter verfolgt. Die Figg. 15—17 zeigen die zweite, dritte und vierte Oberwelle, wobei sich neben den Kreisen noch Striche als Knotenlinien ausgebildet haben, so daß manchmal das Bild die dreizählige Symmetrie aufweist. Mißt man aus den Bildern die Radien der Knotenkreise und bezieht man diese auf den Radius  $a = 1$ , so bekommt man mit der berechneten Tab. 2 folgende Gegenüberstellung:

Tabelle 4

$m$	$f_m$ kHz berechnet	$f_m$ kHz beobachtet	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$
2	1830	1875	0	0,44	0,82		
3	2500	2570	0	0,32	0,61	0,86	
4	3160	3270	0	0,25	0,46	0,69	0,91

Was die Frequenzgleichung betrifft, so wurde die Theorie vollkommen bestätigt. Nach der Gl. (21) muß das Produkt

$$f_m a = A_m = \text{const}$$

und unabhängig von der Dicke der Platten sein. Daß dieses Gesetz sehr gut erfüllt ist, zeigt die folgende Tab. 5, die aus der Tab. 1 und 3 zusammengestellt ist, wobei  $f_m$  in kHz und  $a$  in Zentimetern gemessen worden ist.

Tabelle 5

Platte	$A_0$	$A_1$	$A_2$
I	319	836	1332
III	318	833	1322
IV	319	838	1327
V	318	837	1318
VI	317	829	1326
Mittel	318,2	834,6	1323

Setzt man in die Gl. (21)  $E$  und  $\sigma$  nach (4) und (5),  $x_m$  nach (22) und  $\varrho = 3,1 \text{ g/cm}^3$  nach den Angaben von Straubel ein, und vergleicht man mit der Tab. 5, so bekommt man für die Frequenzen der Grundwelle und der zwei ersten Oberwellen

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Berechnet:} & \text{Gemessen:} \\ f_0 = \frac{299,5}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} & f_0 = \frac{318}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} \\ f_1 = \frac{797}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} & f_1 = \frac{835}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} \\ f_2 = \frac{1270}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} & f_2 = \frac{1320}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} \end{array} \right.$$

Bei der Grundfrequenz ergibt sich zwischen dem gemessenen und dem berechneten Wert ein Unterschied von  $6\%$ , bei der ersten Oberwelle von  $4,5\%$  und von  $4\%$  bei der zweiten. Worauf diese Differenz, die man nicht durch die Meßfehler bei Frequenzmessung erklären kann, zurückzuführen ist, ob auf die Ungenauigkeit in der Bestimmung von  $E$ ,  $\sigma$  und  $\varrho$  oder auf die Theorie selbst, ist schwer zu sagen.

Die Schwingungsform scheint durch die piezoelektrischen Eigenschaften des Turmalins beeinflußt zu sein. Die Platte II ist bei der Grundfrequenz  $f_0 = 626 \text{ kHz}$  gesprungen; dabei stellte sich heraus, daß die Risse gegeneinander um  $120^\circ$  bzw.  $60^\circ$  verschoben sind (Fig. 18). Die Schnittkurve der piezoelektrischen Fläche mit der Plattenebene (Fig. 3) zeigt, daß

die Richtungen, in welchen diese Fläche die Plattenebene durchdringt, gerade Winkel von  $120^\circ$  miteinander bilden. Straubel<sup>2)</sup> hat an einer im Minimum des Elastizitätsmoduls angeregten Quarzplatte gezeigt, daß diese gerade in den Richtungen des kleinsten Elastizitätsmoduls, also der größten Amplitude, auseinandergeflogen ist. Weil es sich bei der Turmalinplatte um Schwingungen in der Richtung des Radius handelt, könnte man daraus schließen, daß eine solche Platte in 3 um  $120^\circ$  verschobenen Richtungen mehr beansprucht ist als an anderen Stellen, was nur auf die Art der Erregung zurückzuführen wäre, weil der Elastizitätsmodul in der Ebene der Platte konstant ist.

An Quarzplatten wurden Schwingungen dieser Art bei zwei verschiedenen Frequenzen

$$(24) \quad f_{\min} = \frac{135,7}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} \quad \text{und} \quad f_{\max} = \frac{191,5}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz}$$

schon von Hund<sup>4)</sup> beobachtet. Meißner<sup>1)</sup> und neuerdings nochmal Straubel<sup>2)</sup>, sowie Wright und Stuart<sup>3)</sup> haben gezeigt, daß diese Zweifälligkeit durch Unhomogenität des Elastizitätsmoduls in der Plattenebene verursacht ist, und daß die Schwingungen in der Richtung des kleinsten bzw. größten Elastizitätsmoduls verlaufen. Bei einer senkrecht zur elektrischen Achse geschliffenen Quarzplatte ist der Wert des kleinsten bzw. größten Elastizitätsmoduls  $E = 0,691 \cdot 10^{12}$  bzw.  $1,285 \cdot 10^{12}$  im cmgsec-System, die zugehörigen Werte von  $\sigma$  nach Gl. (3) 0,138 bzw. -0,02 und die entsprechenden Wurzeln  $x_0$  der Gl. (20) 1,94 bzw. 1,83. Mit diesen Werten ergibt sich

$$(25) \quad f_{\min} = \frac{159}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz}, \quad f_{\max} = \frac{203,5}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz}.$$

Für die Schwingungen in der Richtung des kleinsten Elastizitätsmoduls unterscheiden sich der berechnete und der gemessene Faktor um  $15\%$ , bei den Schwingungen in der Richtung des größten Elastizitätsmoduls nur um  $6\%$ .

Meißner<sup>1)</sup> hat auf einer kreisförmigen Quarzplatte vom Durchmesser 1,5 cm diese beiden Schwingungsarten bei den Frequenzen 180 und 258,5 kHz beobachtet. Berechnet man diese nach Gl. (25), so bekommt man 210 ( $15\%$ ) und 271 kHz ( $5\%$ ), mit fast derselben Differenz, wie bei den Hundschen Beobachtungen. Auch die Ergebnisse von Straubel<sup>2)</sup>, der auf einer Quarzplatte vom Durchmesser 3,5 cm diese Schwingungen bei 77 und 95,1 kHz festgestellt hatte, zeigen mit berechneten Werten 90,8 ( $15\%$ ) und 116 kHz ( $6\%$ ) denselben Unterschied.

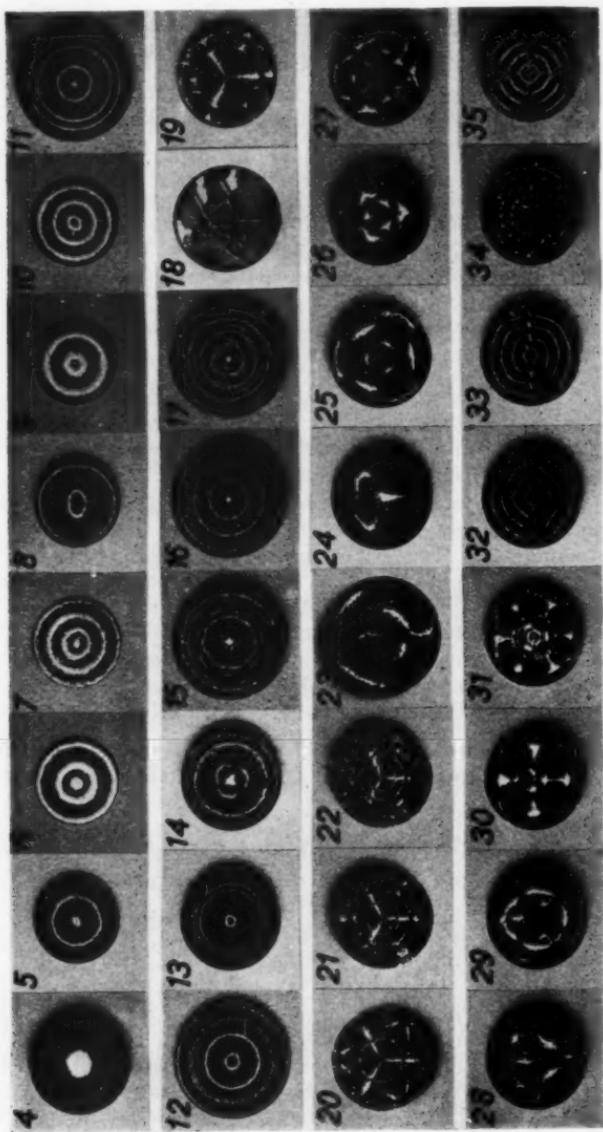


Fig. 4—35

Es scheint also, daß der Schwingungsvorgang wenigstens in der Richtung des kleinsten Elastizitätsmoduls doch nicht so einfach verläuft, und daß man also die Theorie von Love<sup>5)</sup> nicht ohne weiteres anwenden darf.

c) Schwingungen des Typus B

Ganz entsprechend wie im Falle b) kann man Schwingungen erhalten, bei denen  $U$  verschwindet und  $V$  unabhängig von  $\Theta$  ist; die Amplitudengleichung ist nach Gl. (11) durch

$$(26) \quad V = B' J_1(\mathbf{x}' r) \cos \omega t$$

und die Frequenzgleichungen nach Gl. (14) durch

$$\frac{d J_1(\mathbf{x}' a)}{d a} - \frac{J_1(\mathbf{x}' a)}{a} = 0$$

oder

$$(27) \quad J_0(\mathbf{x}' a) = 2 \frac{J_1(\mathbf{x}' a)}{\mathbf{x}' a}$$

gegeben. Die Wurzeln dieser Gleichungen sind

$$x_m = \mathbf{x}' a = 5,14; 8,42; 11,62; 14,80; \dots$$

die weiteren Wurzeln sind mit größerer Genauigkeit als 1% durch die Wurzeln der  $J_0(\mathbf{x}' a)$ -Funktion gegeben. Die Frequenz selbst ist nach Gl. (16)

$$(28) \quad f_m = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{x_m}{2\pi a} \sqrt{\frac{E}{2\varrho(1+\sigma)}} = \frac{B_m}{a},$$

wobei  $B_m$  eine Konstante ist.

Erklärungen zu Figg. 4—35

Fig. 4.	Platte VI;	$f_0 = 528$ kHz.	Fig. 19.	$f_0 = 762$ kHz.
Fig. 5.	Platte IV;	$f_0 = 619$ kHz.	Fig. 20.	$f_1 = 1250$ kHz.
Fig. 6.	Platte III;	$f_0 = 637$ kHz.	Fig. 21.	$f_2 = 1728$ kHz.
Fig. 7.	Platte I;	$f_0 = 596$ kHz.	Fig. 22.	$f_3 = 2195$ kHz.
Fig. 8.	Platte IV;	$f_0 = 619$ kHz.	Fig. 23.	Platte V; $f_1 = 297$ kHz.
Fig. 9.	Platte III;	$f_0 = 637$ kHz.	Fig. 24.	Platte VI; $f_2 = 406$ kHz.
Fig. 10.	Platte I;	$f_0 = 596$ kHz.	Fig. 25.	Platte VI; $f_3 = 533$ kHz.
Fig. 11.	Platte V	auf einer anderen Seite $f_1 = 1191$ kHz.	Fig. 26.	Platte VI; $f_4 = 634$ kHz.
Fig. 12.			Fig. 27.	Platte VI; $f_5 = 845$ kHz.
Fig. 13.	Platte VI	auf einer anderen Seite $f_1 = 1382$ kHz.	Fig. 28.	Platte VI; $f_6 = 869$ kHz.
Fig. 14.			Fig. 29.	Platte VI; $f_7 = 901$ kHz.
Fig. 15.	Platte V	$f_2 = 1875$ kHz. $f_3 = 2570$ kHz. $f_4 = 3270$ kHz.	Fig. 30.	Platte VI; $f = 1322$ kHz.
Fig. 16.			Fig. 31.	Platte VI; $f = 1622$ kHz.
Fig. 17.			Fig. 32.	Platte VI; $f = 1487$ kHz.
Fig. 18.	Platte II;	$f_0 = 626$ kHz.	Fig. 33.	Platte VI; $f = 993$ kHz.
			Fig. 34.	Platte VI; $f = 1553$ kHz.
			Fig. 35.	Platte VI; $f = 1514$ kHz.

Die Knotenlinien sind wieder Kreise mit den Radien, die schon in der Tab. 2 zusammengestellt sind.

Auch diese Art von Schwingungen wurde bei den Turmalinplatten bei den in Tab. 6 zusammengestellten Frequenzen gefunden. Besonders zu bemerken ist, daß diese Schwingungen sich nur dann, und zwar sehr leicht erregen lassen, wenn die Platte ein wenig über die untere Elektrode hinausragt. Liegt die Platte mit ihrer ganzen Fläche auf der unteren Elektrode, dann kann man Schwingungen dieser Art überhaupt nicht oder nur sehr schwer erhalten.

Tabelle 6

Platte	III	IV	V	VI
$f_0$ kHz	923	895	652	762
$f_1$ kHz	1507	1463	1077	1250
$f_2$ kHz	2085	2015	1500	1728
$f_3$ kHz	2690	2565	1902	2195
$f_4$ kHz	—	—	2290	2705

Die zugehörigen Staubfiguren sind für die Platte VI in den Figg. 19—22 wiedergegeben. Auf den ersten Blick ist die dreizählige Symmetrie auffallend; besonders interessant sind die drei Knotenradien, die von der Mitte der Platte ausgehen und um  $120^\circ$  verschoben sind. Diese Knotenradien sind für Schwingungen dieser Art charakteristisch; sie treten nicht nur bei der Grundwelle und allen Oberwellen einer Platte auf, sondern wurden bei allen Platten beobachtet. Eigentlich sollten nach der Theorie bei den Schwingungen des Typus A und B dieselben Bilder als Knotenkreise auftreten, aber man sieht beim Vergleich der Figg. 4—17 mit den Figg. 19—22 sofort den ganz anderen Charakter der beiden Bildergruppen, der auch im Moment des Entstehens der Lycopodiumfiguren ersichtlich wird.

Es wurde darauf verzichtet, die Anzahl der Kreise und ihre Radien mit der Theorie (Tab. 2) zu vergleichen, weil, wie aus den Bildern ersichtlich, die Kreise nicht gut ausgebildet sind.

Dafür ist die Frequenzgleichung in diesem Falle besser erfüllt, als bei den Schwingungen des Typus A. Das Gesetz

$$f_m a = B_m = \text{const}$$

und unabhängig von der Plattendicke wurde auch bei diesen Schwingungen bestätigt (Tab. 7). Die Frequenz  $f_m$  ist in kHz, der Radius  $a$  in Zentimetern zu messen.

Tabelle 7

Platte	$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
III	461	753	1042	1346	—
IV	461	754	1046	1322	—
V	458	756	1052	1336	1608
VI	457	750	1038	1319	1621
Mittel	459	753	1044	1331	1614

Auf Grund der Gl. (4), (5) und (28) kann man  $B_n$  berechnen, und mit den experimentellen Werten vergleichen. So bekommt man

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Berechnet:} & \text{Gemessen:} \\ f_0 = \frac{463}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} & f_0 = \frac{459}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} \\ f_1 = \frac{759}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} & f_1 = \frac{753}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} \\ f_2 = \frac{1049}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} & f_2 = \frac{1044}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} \\ f_3 = \frac{1334}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} & f_3 = \frac{1331}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} \\ f_4 = \frac{1629}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} & f_4 = \frac{1614}{a_{\text{cm}}} \text{ kHz} \end{array} \right.$$

Bei dieser Schwingungsart stimmt die berechnete mit der gemessenen Frequenz sehr gut überein; die Abweichungen sind bei der Grundfrequenz und bei allen Oberwellen kleiner als 1%.

Ein Vergleich dieser Schwingungen mit entsprechenden Schwingungen der Quarzplatten ist bisher nicht möglich, weil diese beim Quarz noch nicht beobachtet worden sind.

#### d) Schwingungen des Typus C

Bei dem dritten Fall kombinieren sich die beiden vorher beschriebenen Schwingungsarten. Setzt man  $U$  und  $V$  nach Gl. (18) in die Gl. (14) ein und eliminiert man das Verhältnis  $A/B$ , so bekommt man die Frequenzgleichung in der Form

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{n(1-\sigma)}{a} \left[ \frac{d J_n(x'a)}{d a} - \frac{J_n(x'a)}{a} \right] \\ \left[ \frac{(1-\sigma)}{a} \frac{d J_n(x'a)}{d a} + \left( x'^2 - \frac{(1-\sigma)n^2}{a^2} \right) J_n(x'a) \right] \\ = \left[ \frac{2}{a} \frac{d J_n(x'a)}{d a} + \left( x'^2 - \frac{2n^2}{a^2} \right) J_n(x'a) \right] \\ 2n \left[ \frac{1}{a} \frac{d J_n(x'a)}{d a} - \frac{1}{a^2} J_n(x'a) \right] \end{array} \right.$$

Aus dieser Gleichung ist wieder zu sehen, daß die Frequenz unabhängig von der Dicke und indirekt proportional dem Durchmesser der Platte ist. Diese Gleichung scheint aber zu kompliziert zu sein, als daß es sich lohnte, die Wurzeln der Gleichung zu berechnen, besonders wenn man nicht weiß, wie sich die experimentell aufgenommenen Bilder der Knotenlinien [wie im Falle c)], von den aus der Amplitudengleichung berechneten unterscheiden werden. Die Knotenlinien können bei der schwingenden Platte nach Gl. (18) dort entstehen, wo

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos n\Theta + \sin n\Theta = 0, \quad \sin n\Theta - \cos n\Theta = 0 \\ \text{und} \\ \frac{n^2}{r^2} \cdot J_n(x'r) J_n(xr) = \frac{d J_n(x'r)}{dr} \cdot \frac{d J_n(xr)}{dr} \end{array} \right.$$

ist. Es wurde also weiter experimentell untersucht, ob doch noch eine andere Art von Schwingungen existiert, bei denen die Frequenz unabhängig von der Dicke und indirekt proportional dem Durchmesser ist. Solche Art von Schwingungen, die in dem nächsten Kapitel näher beschrieben ist, wurden wirklich gefunden; ob es sich dabei aber um Schwingungen vom Typus C handelt, konnte man nicht entscheiden.

#### e) Andere Arten von Schwingungen

Neben den Schwingungen des Typus A und B wurde experimentell noch eine andere Art von Schwingungen bei den in der Tab. 8 zusammengestellten Frequenzen (in kHz) gefunden. Unterhalb der Frequenz  $f_1$  wurde keine Schwingung dieser Art mehr beobachtet.

Tabelle 8

Platte	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
I	389	457	600	718	949	983	1021
III	417	489	641	766	1023	1054	1091
IV	406	472	622	744	993	1023	1061
V	297	348	457	543	727	750	777
VI	345	406	533	634	845	869	901

Auf allen Platten bilden sich bei den entsprechenden Frequenzen dieselben Staubfiguren, nur bei den dünneren Platten sind sie manchmal ein wenig komplizierter; Figg. 23—31 zeigen die Knotenlinien. Bei den höheren Frequenzen kommen diese

Schwingungen in größerer Anzahl. Die hier wiedergegebenen Bilder, die besonders interessant schienen, wurden willkürlich ausgewählt. Die Bilder lassen sich nur dann besonders gut ausbilden, wenn die Platte mit ihrer Fläche nicht ganz auf der Unterlage (untere Elektrode) liegt.

Daß auch bei dieser Art von Schwingungen die Frequenz indirekt proportional dem Radius der Platte ist, also das Gesetz

$$(32) \quad f_m a = C_m = \text{const}$$

gilt, ist aus der Tab. 9 zu ersehen. Die Abweichungen der einzelnen Werte von dem Mittelwert der Konstante  $C_m$  sind bei allen Frequenzen kleiner als 1% und sind durch Meßfehler bei der Frequenzmessung verursacht. Die Frequenz wurde in kHz, der Radius in Zentimetern gemessen.

Tabelle 9

Platte	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$
I	208	244	321	384	508	526	546
III	208	244	320	382	512	527	545
IV	209	243	320	383	511	527	547
V	208	244	321	381	511	526	546
VI	207	243	320	381	510	522	541
Mittel	208	243,6	320	382,2	510,4	525	545

Neben dieser Art von Schwingungen existiert noch eine ganze Reihe von anderen möglichen Schwingungen. Eine Sorte von Schwingungen gibt Bilder mit Knotenlinien, wie in Figg. 32 und 33 dargestellt, und die den Biegungsschwingungen verwandt zu sein scheinen. Einen ähnlichen Fall zeigt auch Fig. 34. Interessant sind auch die in Fig. 35 gezeigten Schwingungen. Diese ähneln wieder, besonders durch ihre Entstehungsweise, den Schwingungen des Typus A; sie bilden auch nur Kreise oder Kreise mit einem Knotendurchmesser. Es ist bisher nicht gelungen, alle diese Schwingungen irgendwie einzufordern; weitere Untersuchungen in dieser Richtung sind im Gange.

### 3. Biegungsschwingungen

Weil die Frequenz der Biegungsschwingungen je nach den Abmessungen der Platte sehr tief, sogar im Gebiete der Tonfrequenz liegen kann, gelang es schon Savart<sup>10)</sup>, in verschiedenen Richtungen zur optischen Achse geschliffene Quarz-

platten im Grundton, allerdings auf mechanischem Wege, zu erregen. Wegen der komplizierten Elastizitätsverhältnisse bei Kristallen konnte Voigt<sup>11)</sup> erst im Jahre 1915 die Theorie der zahlreichen Versuche von Savart aufstellen. Unter Anwendung der von Ritz<sup>12)</sup> für isotrope Platten ausgearbeiteten Methode ist es Voigt gelungen, die Frequenz der Grundschwingung einer in beliebiger Richtung aus dem Kristall ausgeschnittenen Platte abzuleiten. Aber schon die Berechnung des Grundtones ist ziemlich kompliziert und die Behandlung der höheren Töne erscheint nahezu ausgeschlossen und wurde auch von Voigt nicht durchgeführt.

Besonders interessant ist der Versuch von Savart, mit einer senkrecht zur optischen Achse geschliffenen Quarzplatte, bei der sich bei dem Grundton ein Knotendurchmesserkreuz ausgebildet hat; Voigt<sup>11)</sup> (S. 383) äußert sich über diesen Versuch folgendermaßen: „Die erste Platte normal zur  $Z^0$ -Hauptachse (= optischen Achse) sollte sich nach Symmetrie isotrop verhalten, d. h. also nur einen hyperbolischen Grundton geben und die entsprechende Knotenlinie (das Durchmesserkreuz) in allen möglichen Lagen zu erzeugen gestatten.“

Weil in der Ebene der Turmalinplatte der Elastizitätsmodul konstant ist, also die Platte sich als eine isotrope verhalten sollte, scheint es interessant, die Biegungsschwingungen mit den Turmalinplatten zu erzeugen und mit der Kirchhoffsschen<sup>6)</sup> Theorie für isotrope Platten zu vergleichen, besonders darum, weil die optische mit der elektrischen Achse beim Turmalin zusammenfällt und senkrecht zur Platte steht, also die piezoelektrische Erregung sehr günstig ist.

Nach der Kirchhoffsschen<sup>6)</sup> Theorie können die Biegungsschwingungen als Knotenlinien nur Knotendurchmesser oder nur Knotenkreise oder Kombinationen von diesen beiden entstehen. Als Grundfrequenz ist bezeichnet die Frequenz, bei der ein Knotendurchmesserkreuz entsteht, und für die Kirchhoff (vgl. auch Schulze<sup>13)</sup>) folgende Formel angibt:

$$(33) \quad f = 0,261 \frac{d}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ Hz für } \sigma = \frac{1}{4},$$

$$(34) \quad f = 0,256 \frac{d}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ Hz für } \sigma = \frac{1}{3}.$$

( $d$  Dicke und  $a$  Radius der Platte). Bezeichnet man mit  $n$  die Zahl der Knotendurchmesser,  $\nu$  die der Knotenkreise und setzt man die Grundfrequenz = 1, so sind die Verhältnisse der Frequenzen der Oberwellen zum Grundton in folgender Tabelle

für  $\sigma = \frac{1}{4}$  gegeben, die nur sehr wenig verschieden ist von der Tabelle für  $\sigma = \frac{1}{3}$ .

Tabelle 10

$\nu$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0	—	—	1,0000	2,3124	4,0485	6,1982
1	1,6131	3,7032	6,4033	9,6445	13,3937	17,6304
2	6,9559	10,8383	15,3052	20,3249	—	—
3	15,9031	—	—	—	—	—

Wählt man den Radius der Platte = 1, so sind die Radien der Knotenkreise nach Kirchhoff für  $\sigma = \frac{1}{4}$  in der Tab. 11 zusammengestellt.

Tabelle 11

$\nu$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1	0,680	0,781	0,821	0,845	0,860	0,872
2	0,391	0,498	0,560	0,603	—	—
	0,842	0,870	0,887	0,898	—	—
3	0,256	—	—	—	—	—
	0,591	—	—	—	—	—
	0,893	—	—	—	—	—

Die Biegungsschwingungen bei den Turmalinplatten wurden mit allen möglichen Kombinationen der Knotendurchmesser und Knotenkreise, wie die Kirchhoffsche Theorie voraussagt, gefunden. In der Fig. 36 sind Bilder der Knotenlinien für die Platte VI wiedergegeben, die bei den in der Tab. 12 zusammengestellten Frequenzen (in kHz) beobachtet wurden.

Tabelle 12

$\nu$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
0	—	—	48,6	110,4	186,5	276	373	480
1	83,8	180,2	293	419	551	688	824	968
2	320	469	622	779	933	1090	1244	1395
3	642	817	993	1162	1328	1492	1656	1818
4	1012	1195	1370	1542	1724	1874	2040	2205

Berechnet man die Grundfrequenz nach den Gl. (33) und (34), in denen man  $E$  nach Gl. (4) einsetzt, so bekommt man  $f = 50,4$  kHz für  $\sigma = \frac{1}{4}$  und  $f = 49,4$  kHz für  $\sigma = \frac{1}{3}$ . Weil  $\sigma$  nach Gl. (5) 0,258 ist, sollte die Grundfrequenz fast genau

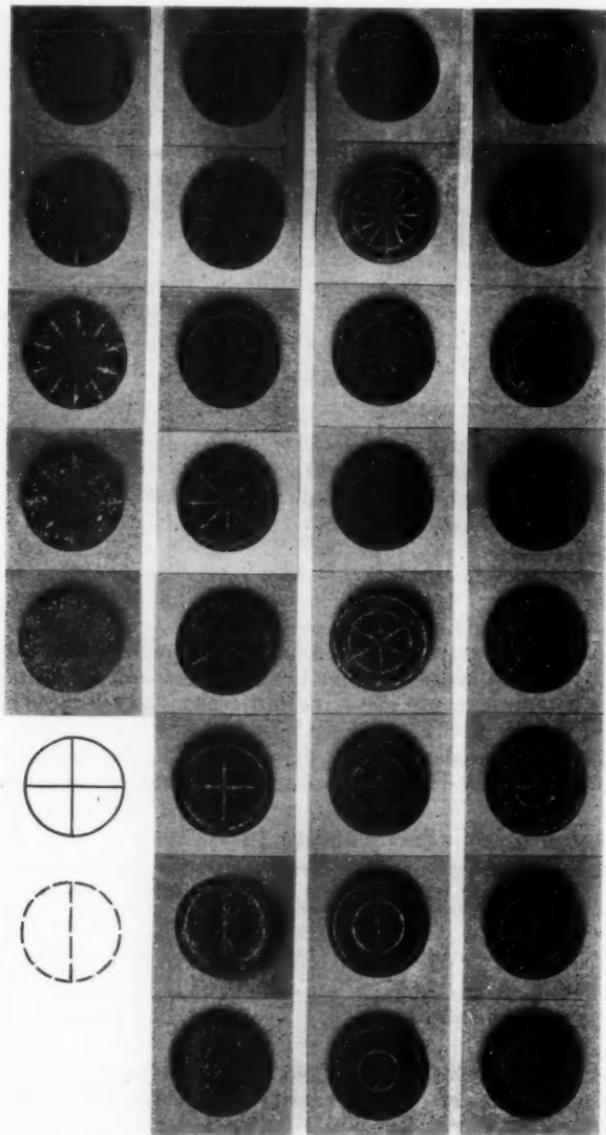


Fig. 36. Platte VI; Biegungsschwingungen

gleich sein der Frequenz  $f = 50,4$  kHz höchstens zwischen den beiden Frequenzen liegen; sie ist aber kleiner als beide Frequenzen und von der höheren um 4% verschieden.

Bezieht man die in der Tab. 12 zusammengestellten Frequenzen auf die Grundfrequenz  $f = 48,6$  kHz, so bekommt man mit der Tab. 10 folgende Gegenüberstellung:

Tabelle 13

$r$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0	—	—	1,00	2,27	3,84	5,67
1	1,73	3,71	6,03	8,63	11,32	14,17
2	6,58	9,66	12,80	16,03	—	—
3	13,22	—	—	—	—	—

Bei den höheren Frequenzen zeigt sich ein Unterschied von 20%, der bei der Schwingung mit drei Knotenkreisen sogar noch größer ist.

Chladni hat bei den akustischen Versuchen gefunden, daß die Frequenzen der Töne, die in ihren Klangfiguren dieselbe Anzahl von Durchmessern haben (d. h. der Töne, die demselben  $n$  entsprechen), mit Ausnahme der tiefsten sich beinahe wie Quadrate aufeinanderfolgender gerader oder ungerader Zahlen verhalten, je nachdem die Zahl der Knotendurchmesser gerade oder ungerade ist. Aber auch dieses Gesetz wurde bei Turmalinplatten nicht bestätigt; denn die Abweichungen von diesem Gesetz erreichen manchmal 20%.

Dagegen stimmen die Knotenlinien in allen möglichen Kombinationen von Knotendurchmessern und Knotenkreisen, wie die Fig. 36 zeigt, mit der Theorie überein. Sogar zeigte sich sehr schöne Übereinstimmung der von Kirchhoff berechneten Radien der Knotenkreise mit den aus den Bildern der Fig. 36 abgemessenen Radien (Tab. 14,  $a = 1$  gesetzt).

Tabelle 14

$r$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1	—	0,78	0,83	0,85	0,86	0,88
2	0,39	0,50	0,56	0,61	—	—
	0,85	0,87	0,90	0,91	—	—
3	0,26	—	—	—	—	—
	0,59	—	—	—	—	—
	0,89	—	—	—	—	—

Der Vergleich der Schwingung mit einem Knotenkreis ist nicht möglich, denn wie aus den Bildern zu ersehen ist, lassen sich die Figuren bei tiefen Frequenzen schwerer als bei den höheren erzeugen. Besonders die Grundfrequenz, bei der ein Knotendurchmesserkreuz entstehen sollte, läßt sich schwer erregen; man bekommt kein gutes Bild, sondern daß die Platte wirklich schwingt, sieht man nur daran, daß das *Lycopodium* an 4 Stellen des Randes tanzt oder von der Oberfläche weggeschleudert wird.

Alle diese Bilder, besonders die mit Knotendurchmessern, kann man sehr leicht nur dann erregen, wenn die Platte auf ihrer Unterlage unsymmetrisch aufliegt. Am schwersten ist es immer, die Knotendurchmesser allein zu bekommen; diese Figuren hat Schulze<sup>13)</sup> bei der Untersuchung der Schwingungen von mikroskopischen Deckgläsern überhaupt nicht gefunden.

In der Gegend von 1000 kHz kann man eine sehr interessante Erscheinung beobachten; schon bei ganz schwacher Erregung der Platte beginnen die Knotendurchmesser zu rotieren, so daß sich das ganze Bild verzerrt. Denn wenn die Platte wirklich symmetrisch ist, ist keine Richtung bevorzugt, also die Lage der Knotendurchmesser beliebig und nur von der Befestigung und Erregung der Platte abhängig. Man konnte durch Drehung der Platte auf der Unterlage immer eine Stelle finden, bei der sich die Staubfiguren gut ausbilden ließen. Diese Erscheinung ist schon bei akustischen Versuchen längst bekannt und von Lord Rayleigh<sup>14)</sup> (I, S. 363) erwähnt. Bei dem Bild mit drei Knotenkreisen und drei Knotendurchmessern zeigte sich wieder, daß bei kleiner Veränderung der Frequenz des Senders das ausgebildete Bild in ein neues umspringt, wobei die Knotendurchmesser ihre Lage gegen den früheren Durchmesser um 30° verändern.

Bei den höheren Frequenzen, wo auch schon sehr viele andere Schwingungsarten unmittelbar nebeneinander vorkommen, ist es manchmal sehr schwer, ein sauberes Bild zu bekommen. Manchmal kombinieren sich sogar zwei Arten von Schwingungen, wie das Bild bei der Frequenz  $f = 2205$  kHz (Fig. 36) in der rechten unteren Ecke) zeigt.

Um einen Überblick über das ganze Gebiet zu bekommen, werden diese Versuche weiter auch an Quarzplatten fortgesetzt, besonders interessant wird der Fall der Quarzplatte sein, die senkrecht zur optischen Achse geschliffen wird, was den gerade beschriebenen Versuchen mit Turmalinplatten entsprechen

wird. Versuche mit rechteckigen Turmalinplatten und auch die Drillungsschwingungen werden in einer anderen Arbeit beschrieben werden.

#### Zusammenfassung

Senkrecht zur optischen Achse geschliffene Turmalinplatten können nach der Theorie von Love in der Ebene der Platte drei Arten von Schwingungen ausführen.

Zwei Arten dieser Schwingungen, eine in der Richtung des Radius (Typus A), die andere senkrecht zum Radius (Typus B), wurden in Übereinstimmung mit der Theorie gefunden.

Daneben wurde noch eine Art von Schwingungen beobachtet, deren Frequenz indirekt proportional dem Radius und unabhängig von der Dicke der Platte ist. Ob das wirklich die dritte von Love vorausgesagte Art von Schwingungen (Typus C) ist, konnte nicht entschieden werden.

Weil sich die (senkrecht zur optischen Achse geschliffenen) Turmalinplatten in ihrer Ebene als isotrope Platten verhalten, sollte es möglich sein, auch Biegungsschwingungen mit allen möglichen Knotenlinien, wie die Kirchhoffsche Theorie verlangt, mit Turmalinplatten zu erzeugen. Auch diese Schwingungsart (Fig. 36) wurde bei den Turmalinplatten in Übereinstimmung mit der Theorie festgestellt.

Hrn. Prof. Dr. G. Leithäuser und Hrn. Prof. Dr. H. Sallinger danke ich für ihr lebhaftes und förderndes Interesse, Hrn. Präsident Prof. Dr. K. W. Wagner insbesondere auch dafür, daß er mir zur Durchführung der Versuche neben den Mitteln seines Institutes solche der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft und der Heinrich-Hertz-Gesellschaft zur Förderung des Funkwesens zur Verfügung gestellt hat.

Der Firma Carl Zeiss, besonders Hrn. Dr. H. Straubel, bin ich für Überlassung einiger Turmalinplatten zu großem Danke verpflichtet.

#### Literatur

- 1) A. Meissner, Phys. Ztschr. **28**, S. 621. 1927.
- 2) H. Straubel, Ztschr. f. Hochfr.-Techn. **38**, S. 14. 1931.
- 3) R. B. Wright u. D. M. Stuart, Bur. of Stand. Journ. of Res. **7**, S. 519. 1931.
- 4) A. Hund, Proc. I. R. E. **15**, S. 447. 1926.
- 5) A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical theory of Elasticity*; Cambridge, 1927.

6) G. Kirchhoff, Crelles Journal of Math. **40**. S. 51. 1850; Pogg. Ann. d. Phys. **81**. S. 258. 1850, Gesammelte Werke S. 279.  
 7) W. Voigt, Lehrbuch d. Kristallphysik, Leipzig 1910.  
 8) W. Voigt, Gött. Nachrichten S. 279. 1890; Wied. Ann. **41**. S. 712. 1890.  
 9) H. Straubel, Phys. Ztschr. **32**. S. 937. 1931.  
 10) F. Savart, Ann. de Chim. et de Physique [1] **39**. S. 5 u. 113. 1829.  
 11) W. Voigt, Gött. Nachrichten, S. 345. 1915.  
 12) W. Ritz, Crelles Journ. f. Math. **35**. S. 1. 1908; Ann. d. Phys. **28**. S. 737. 1909.  
 13) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. **24**. S. 785. 1907.  
 14) Lord Rayleigh, Theory of Sound (1929).

(Eingegangen 14. Oktober 1932)

### Berichtigung

In der Arbeit E. Goens, Über die Biegsungs- und Drillungsschwingungen usw. Bd. 15, H. 4, S. 455 ff. 1932 ist folgender Druckfehler übersehen worden. Die Bezeichnung der angreifenden Momente in Gl. (2) und später, muß  $L$ ,  $M$ ,  $N$  anstatt  $L$ ,  $M$ ,  $N$  lauten. Im besonderen sind die Grenzbedingungen auf S. 463 oben folgendermaßen zu schreiben:

$$\left. \begin{aligned} L &= \pm J_x \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^4} - \frac{\partial L}{\partial z} = \pm M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ M &= \mp J_y \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^4} \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \pm M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad N = \mp J_z \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} z = \pm l'.$$

Anmerkung 2) auf S. 457 muß lauten:

„Dasselbe gilt für alle Querschnittsformen mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten“.

(Eingegangen 23. Dezember 1932)

## **Der Faradayeffekt in ionisierten Gasen bei Wellen von 4 cm Länge**

**Von Paul Keck\*)**

(Mit 11 Figuren)

### **§ 1. Einleitung**

Der Faradayeffekt der Optik\*\*) — die Drehung der Polarisationsebene von Lichtwellen durch ein Magnetfeld, längs dessen sie sich fortpflanzen — ist keine einfache Erscheinung, da die Elektronen, auf die das elektrische Feld der Wellen und das angelegte magnetische Feld wirkt, nicht frei, sondern durch komplizierte Kräfte an die Atome bzw. Moleküle des Mediums gebunden sind. Klar und einfach liegen die Verhältnisse dagegen, wenn es sich nicht um gebundene, sondern um freie Ladungsträger handelt, ein Fall, der in ionisierten Gasen mit um so größerer Annäherung vorliegt, je geringer der Gasdruck ist.

Dieser Faradayeffekt in ionisierten Gasen von niederem Druck hat bekanntlich in letzter Zeit praktische Bedeutung erreicht. Man weiß, daß er für die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in den hohen ionisierten Schichten der Atmosphäre eine wesentliche Rolle spielt.<sup>2)</sup> <sup>3)</sup> <sup>4)</sup>

### **§ 2. Allgemeine quantitative Zusammenhänge**

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in ionisierten Gasen unterscheidet sich im allgemeinen nach drei Richtungen von der in nicht-ionisierten.

1. Durch das Mitschwingen der Elektrizitätsträger (Elektronen und Ionen) wird eine Änderung der Phasengeschwindigkeit in dem ionisierten Gas verursacht in dem Sinne, daß die Phasengeschwindigkeit größer wird als im nicht-ionisierten Gas. Der Brechungsexponent, der im nicht-ionisierten Gas  $\approx 1$  ist, wird  $< 1$ , und zwar unter sonst gleichen Bedingungen um so kleiner, je größer die Trägerkonzentration  $N$  ist.

\*) Dissertation der Technischen Hochschule München, eingereicht am 30. Juni 1932.

\*\*) Vgl. Lehrbücher der Optik, z. B. Müller Pouillet's.<sup>1)</sup>

Auf Grund der bekannten Beziehung zwischen Brechungsindex, Trägerkonzentration und Frequenz [vgl. z. B. <sup>4</sup>)] läßt sich die Trägerkonzentration aus dem bei einer bestimmten Frequenz gemessenen Brechungsindex berechnen.

2. Die durch das elektrische Feld der Welle zum Mischwingen angeregten Träger können nicht frei ausschwingen, sondern stoßen mit anderen Ionen oder Molekülen zusammen und entziehen dadurch der Welle Energie. Es tritt also Absorption ein. Die Absorption ist der Stoßzahl  $S$  direkt proportional. Man kann infolgedessen durch geringen Gasdruck die Absorption verkleinern.

3. Bei Vorhandensein eines Magnetfeldes werden die geladenen Teilchen, die eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Magnetfeld haben, abgelenkt. Pflanzt sich eine linear polarisierte Welle längs eines Magnetfeldes fort, so wirkt dieses auf die eine der beiden zirkular polarisierten Wellen, in die man sich die linear polarisierte zerlegt denken kann, beschleunigend, auf die andere dagegen verzögernd. Dadurch wird eine Drehung der Polarisationsebene hervorgerufen.<sup>\*)</sup> Der Drehwinkel  $\Phi$  ist bei fester Frequenz und festem Magnetfeld eine Funktion der Trägerkonzentration  $N$ .

Also:

$$\Phi = F(N).$$

Diese Arbeit bezieht sich auf den 3. Punkt, den Faradayeffekt. Die gestellte Aufgabe war:

1. Den Drehwinkel der Polarisationsebene experimentell zu messen;

2. den gemessenen Wert mit dem aus der Beziehung  $\Phi = F(N)$  errechneten zu vergleichen. Dazu war die Kenntnis der Trägerkonzentration  $N$  notwendig. Diese wurde aus dem Brechungsexponenten bestimmt und zu diesem Zweck der Brechungsindex gemessen.

### § 3. Experimenteller Teil

Die Trägerkonzentration, die notwendig ist, um auf den Brechungsindex einer elektromagnetischen Welle einen merklichen Einfluß auszuüben, ist dem Quadrat der Wellenlänge umgekehrt proportional. Der Größe der Trägerdichte ist nun experimentell eine Grenze gesetzt; die Wellenlänge darf also nicht zu klein sein. Dadurch scheidet tatsächlich die Ver-

<sup>\*)</sup> Im allgemeinen Fall tritt nicht eine einfache Drehung der Polarisationsebene auf, sondern es entsteht eine elliptisch polarisierte Welle.

wendung optischer Wellen aus. Andererseits durfte aber auch die Wellenlänge nicht zu groß gewählt werden. Bei der Messung der Drehung der Polarisationsebene muß man mit wirklichen elektromagnetischen *Wellen* arbeiten, die sich durch das ionisierte Gas hindurch fortpflanzen.\*). Die Dimensionen des Gefäßes, das das Gas enthält, müssen daher groß gegen die Wellenlänge sein. Aus diesen Überlegungen ergab sich als zweckmäßig, für die Versuche eine Wellenlänge von etwa 4 cm zu verwenden.

### 1. Versuchsanordnung für die Wellen

#### a) Sender

Da die Schwierigkeiten mit ungedämpften Wellen von etwa 4 cm Länge doch noch sehr erheblich sind, so wurde vorgezogen, mit gedämpften Wellen zu arbeiten.

Als Sender (Figur 1) diente in üblicher Weise ein kleiner Dipol aus zwei Wolframstiftchen *W* von je 7 mm Länge und 1,5 mm Dicke. Wolfram zeigte sich als zuverlässiger und widerstandsfähiger als das sonst meist verwendete Platin. Die Stiftchen waren, wie in einer Arbeit von Dänzer<sup>6)</sup> angegeben, in Glaskröpfchen *G* eingeschmolzen und diese waren ihrerseits, wie in Fig. 1 ersichtlich, an den Backen eines Hartholzhalters *H* befestigt. Zum Zwecke der genauen Justierung konnte das eine der beiden Glaskröpfchen mittels Zug- und Druckschrauben *S* verstellt werden. Waren nun die Stiftchen ge-

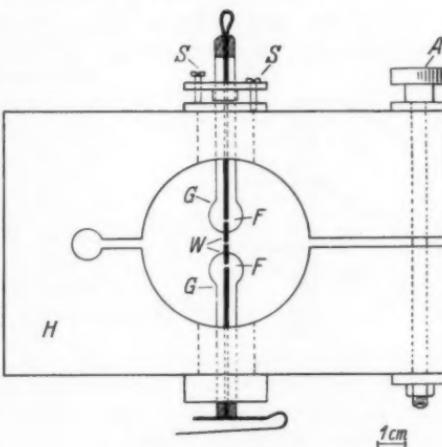


Fig. 1. Sender

\*). Bei der Messung des Brechungsexponenten ist dies nicht nötig. Man kann hier das Gefäß mit dem Gas zwischen die Platten eines Kondensators bringen und die Änderung der Kapazität, die durch die Ionisierung des Gases hervorgerufen wird, messen.<sup>7)</sup>

nau justiert, so konnte die Funkenstrecke mit einem dünnen Stahlblech und Schmiergel exakt plan geschliffen werden. Zur genauen Einstellung des Funkenabstandes war der ganze Halter geschlitzt und konnte durch eine Stellschraube *A* mehr oder weniger stark zusammengepreßt werden. Als Zuleitung zum Dipol dienten Luftfunken *F*, die im Innern der Glaskörnchen von den Zuleitungsdrähten auf die Wolframstiftchen übersprangen. Die Länge dieser Funken spielte nur eine untergeordnete Rolle und betrug etwa 1 mm. Es erwies sich weiterhin als günstig, die Funkenstrecke unter strömendem Petroleum zu betreiben.

Der Sender wurde mit 500 periodigem Wechselstrom gespeist, der auf 8000 Volt transformiert war.

#### b) Empfänger

Die für diese kurzen Wellen verwendbaren Empfänger sind entweder Thermoelemente oder Bolometer. Hier wurden Bolometerresonatoren benutzt, wie sie auch von Dänzer<sup>6</sup> benutzt worden sind. In Fig. 2 ist ein solcher Empfänger skizziert.

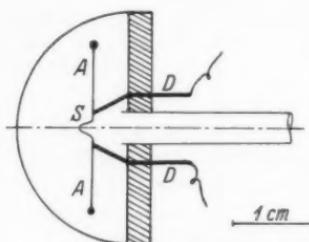


Fig. 2. Empfänger

nen als Verbindung zur Wheatstoneschen Brücke. Das Bolometer wurde der höheren Empfindlichkeit halber ins Vakuum gesetzt.

Die günstigste Wirkung ist dann zu erwarten, wenn der Widerstand der Schleife und der Strahlungswiderstand der Antenne einander gleich sind. Der Strahlungswiderstand einer linearen Antenne ist nun, unabhängig von deren Länge, etwa  $73 \Omega$ <sup>7</sup>), wenn die Dicke sehr klein gegen die Länge ist. Es wurde deshalb die Schleife *S* auf ungefähr  $73 \Omega$  Widerstand abgeätzt.

Als Meßinstrument in der Wheatstoneschen Brücke wurde ein Spiegelgalvanometer von Hartmann & Braun mit einer Empfindlichkeit von  $1,85 \cdot 10^{-8}$  Amp./Skt. bei  $4 \Omega$  innerem

Widerstand verwendet. Die Störungen der zur Anregung des Senders und der später zu beschreibenden, zur Ionisierung der Gase benutzten Schwingungskreise auf das Bolometer waren anfangs sehr erheblich. Doch konnten sie durch Panzerung aller Galvanometerleitungen und durch Parallelschalten von großen Kapazitäten zu den Bolometerleitungen und allen Brückenzweigen fast vollkommen beseitigt werden.

e) *Linsen*

Um einerseits ein Bündel paralleler Strahlen zu erhalten und andererseits einen möglichst großen Winkelbereich der

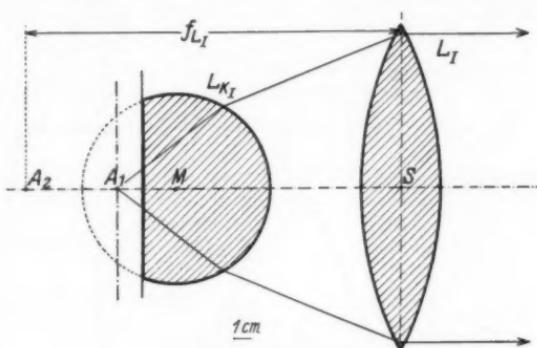


Fig. 3. Linsensystem am Sender

Senderstrahlung auszunützen, wurde ein Paraffinlinsensystem nach Art eines Mikroskop-Immersionssystems (Fig. 3) verwendet, ähnlich wie es schon von Dänzer<sup>6)</sup> benutzt worden war.

Um die parallele Strahlung am Ort des Empfängers wieder zu konzentrieren, wurde eine sphärische, ebenfalls aus Paraffin bestehende Bikonvexlinse verwendet.

Es war interessant, zu prüfen, in welchem Maße diese Paraffinlinsen, deren Dimensionen nur einige Wellenlängen betragen, wie optische Linsen wirken. Zu diesen Zwecke wurden folgende Versuche gemacht.

a) Sender und Empfänger waren in einer Entfernung von 60 cm aufgestellt (Fig. 4). Wurden nun der Reihe nach die Linsen  $L_{KII}$ ,  $L_I$  und  $L_{II}$  eingeschaltet, so zeigten sich in  $E$  folgende Ausschläge:

Tabelle 1

	Galv. Ausschlag	Verstärkung
Ohne Linsen . . .	20 Skt.	1 fach
Mit $L_{KII}$ . . . .	89 "	4,45 "
" $L_{KII} + L_I$ . . .	510 "	25,5 "
" $L_{KII} + L_I + L_{II}$	1800 "	90 "

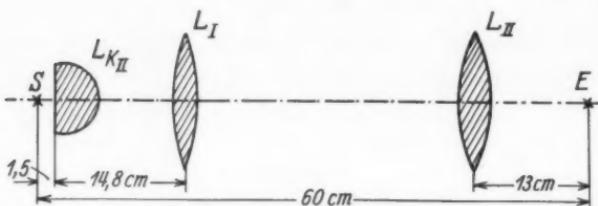


Fig. 4. Anordnung zur Prüfung der Linsenwirkung

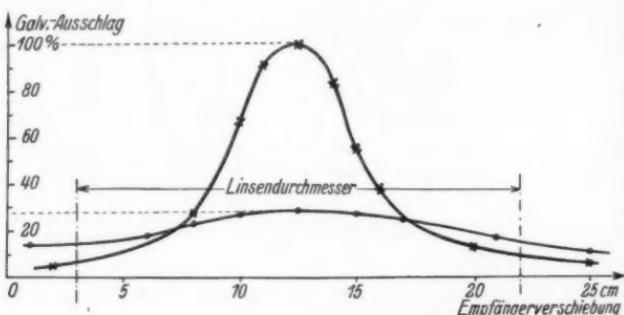


Fig. 5. Ergebnis der Linsenprüfung

ß) Die Ebene in  $E$  senkrecht zum Strahlenbündel, mit dem Empfänger abgetastet, ergab ohne  $L_{II}(\circ)$  und mit  $L_{II}(x)$  die in Fig. 5 gezeigte Energieverteilung. Man erkennt deutlich die Energiekonzentration im „Brennpunkt“ von  $L_{II}$ .

## 2. Versuchsanordnung zur Ionisierung der Gase

Um einerseits eine wohl definierte Schichtdicke des ionisierten Gases zu haben und um andererseits eine Linsenwirkung des Gefäßes zu vermeiden, wurde im Gegensatz zu anderen Messungen<sup>6, 8)</sup> ein Glaszylinder mit planparallelen

Deckflächen verwendet. Das Gefäß hatte einen Innendurchmesser von 20 cm und eine Länge von 24,5 cm. Zwei Pumpelleitungen, die gestatteten in strömendem Gas zu arbeiten, waren in der Mitte des Zylindermantels diametral gegenüber eingeschliffen und von außen verkittet.

Zur Erzeugung der Ionisierung wurde elektrodenloser Ringstrom verwendet. Es wurde deshalb um den Glaszyylinder eine Spule mit 21 Windungen aus starkem Kupferseil ge-

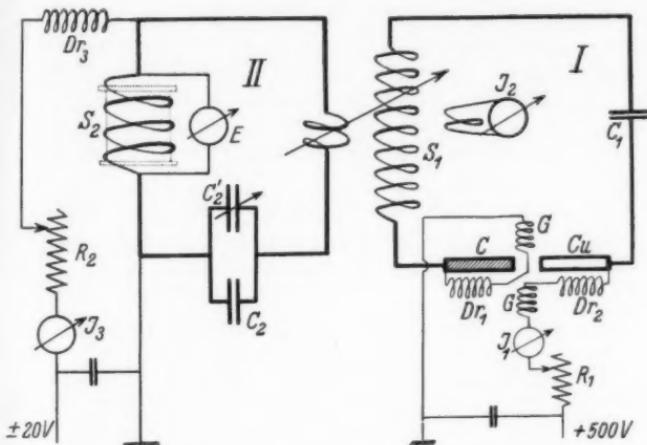


Fig. 6. Anordnung zur Ionisierung des Gases

wickelt. Für die gleichmäßige Ionisierung im Innern des Gefäßes war es günstig, die Spule unmittelbar auf den Zylindermantel zu wickeln. In Fig. 6 ist die Schaltkizze für die Ionisierung wiedergegeben.

Durch einen Pulsengenerator, der primär mit 500 Volt gespeist wurde und eine Hochfrequenzleistung von 3—5 kW ergab, wurde der Schwingungskreis I auf 1600 m Wellenlänge erregt. Durch lose Kopplung wurde der auf I abgestimmte Kreis II zum Schwingen gebracht. Die Anregungsspule  $S_2$  bildete mit etwa 80 000 cm den Hauptteil der Selbstinduktion in II, während die Kapazität  $C_2 + C_2'$  etwa 6600 cm betrug. Für günstiges Arbeiten des Pulsengenerators war es hingegen notwendig, im Kreis I geringe Kapazität ( $C_1 = 650$  cm) und dafür größere Selbstinduktion zu haben. An den Enden der Anregungsspule  $S_2$  wurde eine effektive Spannung von 2 bis

3000 Volt erzeugt, die durch Änderung der Abstimmung in weiten Grenzen variiert werden konnte. Mit dieser Anordnung ließ sich tatsächlich eine Elektronenkonzentration von etwa  $5 \cdot 10^{11}/\text{cm}^3$  erzielen.

Als einfachster Weg, um im Gas ein Magnetfeld zu erzeugen, wurde der gewählt, die Anregungsspule selbst als Magnetfeldspule zu verwenden, wenn auch wegen der geringen Windungszahl eine merkliche Inhomogenität mit in Kauf genommen werden mußte. Es wurde über die Drossel  $Dr_3$  Gleichstrom zugeführt und auf der anderen Spulenseite zur Erde abgeleitet. Das Magnetfeld konnte durch Gegenerregung der stromliefernden Maschine bequem umgekehrt werden, ohne daß am Schwingungskreis II irgend etwas geändert werden mußte. Es wurden Magnetfeldströme bis zu 100 Amp. verwendet, was einem mittleren Magnetfeld von 74 Gauss entsprach.

### 3. Anordnung zur Bestimmung des Brechungsindex

Der Brechungsindex wurde interferometrisch gemessen.<sup>9)</sup> In Fig. 7 ist das verwendete Interferometer skizziert. Vom

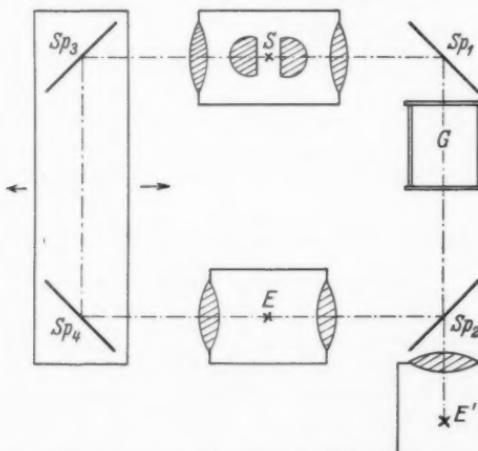


Fig. 7. Anordnung zur Messung des Brechungsexponenten und der Drehung der Polarisationsebene

Sender  $S$  gehen symmetrisch nach beiden Seiten durch je eines der oben erwähnten Linsensysteme parallel gerichtete elektrische Wellen aus. Das eine Bündel wird von den beiden festen Spiegeln  $Sp_1$  und  $Sp_2$  zum Empfänger  $E$  re-

flktiert, während die beiden Spiegel  $Sp_3$  und  $Sp_4$ , die den symmetrischen Zweig bilden, gemeinsam auf einem Wagen angebracht sind, durch dessen Parallelverschiebung ein beliebiger Gangunterschied der beiden Zweige untereinander hervorgerufen werden kann. Die Wagenstellung konnte mittels Nonius auf  $1/10$  mm genau bestimmt werden. Als Spiegel dienten mit Stanniol beklebte Glasplatten von  $30 \times 30$  cm Größe. Ihre Justierung geschah auf optischem Wege. Zwischen  $Sp_1$  und  $Sp_2$  befand sich der Glaszyylinder mit dem ionisierten Gas, dessen Brechungsindex bestimmt werden sollte.

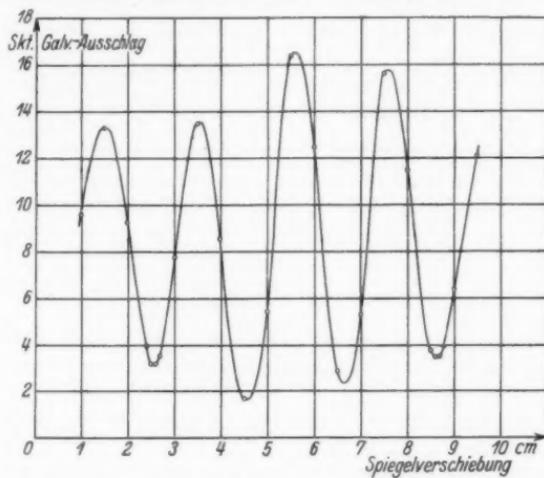


Fig. 8. Messung der Wellenlänge mit dem Interferometer

Um die Brauchbarkeit des Interferometers zu erweisen, wurden erst Wellenlängenmessungen gemacht. Als Beispiel sei eine Interferenzkurve wiedergegeben [Fig. 8\*]. Die entsprechende Wellenlänge ergibt sich aus der Kurve zu  $\lambda = 4,05$  cm (Fehler  $\pm 1\%$ ). Wird nun in den einen Zweig des Interferometers ein Medium von der Schichtdicke  $l$  eingeschaltet, und ist die dadurch hervorgerufene Verschiebung eines Interferenzminimums  $v$ , so ergibt sich der Brechungsindex zu:

$$n = 1 \pm \frac{v + p \lambda}{l}, \quad p = 0, 1, 2 \dots,$$

\* Die gemessene Wellenlänge wird sowohl durch die Dimension des Senders wie auch durch die des Empfängers bestimmt.<sup>11)</sup> Sender und Empfänger wurden möglichst gut aufeinander abgestimmt.

wobei das Pluszeichen eine Vergrößerung, das Minuszeichen eine Verkleinerung des Weges bedeutet.

Auf diese Weise wurde zunächst der Brechungsindex von Paraffin gemessen. Ein Paraffinblock von der Dicke  $l = 113,2$  mm lieferte eine Verschiebung  $v = 14,5$  mm und ein zweiter mit der Dicke  $l = 75,6$  ergab  $v = 35,6$  mm.

Aus dem ersten Wert ergibt sich für  $p = 1$   $n = 1,485 \pm 0,015$ .

Aus dem zweiten Wert folgt für  $p = 0$   $n = 1,475 \pm 0,015$ .

Die Werte stehen in guter Übereinstimmung mit denjenigen aus der Maxwellschen Beziehung  $n = \sqrt{\epsilon} = 1,45$ .

#### 4. Anordnung zur Bestimmung der Drehung der Polarisationsebene

Die lineare Funkenstrecke als Sender bietet den Vorteil, von vornherein linear polarisierte Wellen zu liefern. Außerdem

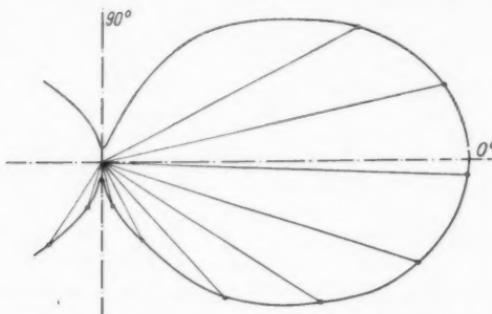


Fig. 9. Richtcharakteristik der Empfangsantenne

zeigt auch die kleine Empfangsantenne einen ausgeprägten Richteffekt. Steht sie parallel zur Sendeantenne, also in Richtung des elektrischen Vektors der Wellen, so empfängt sie maximal, senkrecht dazu minimal. In obenstehender Fig. 9 ist ein Diagramm wiedergegeben, in dem als Radiusvektor der Galvanometerausschlag, also die Empfangsintensität, in Abhängigkeit vom Winkel, den die Antenne mit dem Sender bildet, aufgetragen ist.

Die Polarisation der vom Sender ausgehenden Wellen wurde ferner noch dazu ausgenutzt, um durch ein Drahtgitter die Intensität des einen Interferometerzweiges der durch

Absorption (und Reflexion an den Glaswänden des Gefäßes) geschwächten Intensität des anderen anzupassen.

Beim Interferometer (Fig. 7) war der Spiegel  $Sp_2$  leicht auszuwechseln, so daß der Empfänger  $E'$ , der um seine horizontale Achse (vgl. Fig. 2) gedreht wurde, zur Bestimmung der Lage der Polarisationsebene benutzt werden konnte. Mittels Winkelmesser und Zeiger konnte die Drehung des Empfängers auf  $1/2\%$  genau abgelesen werden. Außerdem konnte  $E'$  auch bequem zu Absorptionsmessungen benutzt werden, wobei  $E$  als Kontrollempfänger Verwendung fand.

#### § 4. Verhalten der Gase bei der Ionisation

##### 1. Luft

Zunächst wurden Messungen an Luft (Hg ausgefroren!) versucht. Ohne Gleichstrommagnetfeld bewirkte das Wechselfeld der Anregungsspule bei Drucken von etwa  $5-50 \cdot 10^{-3}$  mm Hg ein sehr helles rosafarbiges Leuchten, das ganz gleichmäßig über den Querschnitt verteilt zu sein schien. Gleichzeitig war je nach der Stärke der Anregung und Druckeinstellung eine Absorption bis zu  $30\%$  zu beobachten und im Interferometer wurden deutliche Verschiebungen festgestellt. Die Elektronenkonzentration im Innern ergab sich zu etwa  $5-10 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3$ . Durch wechselseitiges Abblenden vom Rand und Zentrum wurde auch festgestellt, daß die Ionisation im Innern des Zylinders tatsächlich als praktisch gleichmäßig betrachtet werden durfte. Bei höheren Drucken  $p > 6 \cdot 10^{-2}$  mm Hg war die Entladung nicht mehr gleichmäßig, sondern bildete einen mit zunehmendem Druck immer deutlicher werdenden Ring, der das Zentrum mehr und mehr frei ließ. Unter einem Druck von  $5 \cdot 10^{-3}$  mm Hg konnte im Gefäß überhaupt keine sichtbare Veränderung mehr hervorgerufen werden.

Diese Verhältnisse wurden nun durch Einschalten des Magnetfeldes wesentlich verändert. Die helle Entladung wurde ganz merklich schwächer und stark an den Rand gedrückt. Mit stärker werdendem Magnetfeld wurde auch der Druckbereich, in dem das helle Leuchten auftrat, kleiner und bei etwa 60 Amp. Magnetfeldstrom war es überhaupt nicht mehr möglich, diese helle Entladung zu erregen.

Es wurde nun zentral durch den Glaszyylinder ein Wolframdraht gespannt. War dieser Draht mit der Mitte oder einem Ende der Anregungsspule verbunden, so wirkte ein elektrisches Feld in radialer Richtung, was eine gleichförmigere Ionisierung geben sollte. Tatsächlich wurde durch diese Anordnung er-

reicht, daß die Entladung auch bei Einschaltung des Magnetfeldes ziemlich gleichmäßig blieb, wobei der Wolframdraht durch die auf ihn prallenden Elektronen und Ionen in helles Glühen geriet.

Bei 50 Amp. Magnetfeldstrom gelang dann der Nachweis einer Drehung der Polarisationsebene, doch betrug diese Drehung maximal nur  $2^\circ$ , wobei die Meßgenauigkeit schon fast  $75\%$  dieses Wertes einnahm. Durch mehrmaliges Umpolen des Magnetfeldes, wobei sich auch der Sinn der Drehung der Polarisationsebene umkehrte, wurde der Effekt sicher gestellt, doch konnte er wegen seiner Kleinheit keine brauchbaren quantitativen Ergebnisse liefern.

## 2. Neon

Erheblich änderten sich die Verhältnisse bei Verwendung von Neon statt Luft. Schon bei einem Druck von 2 mm Hg war der Glaszyylinder mit einem äußerst intensiven gelbroten Leuchten erfüllt und das Magnetfeld störte die Gleichmäßigkeit der Entladung kaum. Der Wolframdraht in der Mitte war nicht mehr notwendig. Die elektrischen Wellen wurden stark absorbiert. Mit sinkendem Druck ward das Leuchten noch heller und das Glasgefäß ließ überhaupt keine Wellen mehr durch (1 bis  $5 \cdot 10^{-2}$  mm Hg). Erst bei einem Druck unterhalb  $5 \cdot 10^{-3}$  mm Hg gelangten wieder Wellen durch das Gefäß; bei etwa  $4 \cdot 10^{-3}$  erlosch die Entladung vollständig. In dem Druckgebiet von 1 bis  $5 \cdot 10^{-2}$  mm Hg konnte durch Variation der Anregungsstärke wenig erreicht werden; entweder sprang das helle Leuchten an, dann war die Elektronenkonzentration zu hoch, oder aber bei geringer Schwächung brach das Leuchten ab, und dann war die Elektronenkonzentration zu gering. Für Messungen kam also nur das schmale Druckintervall von etwa 50 bis  $5 \cdot 10^{-3}$  mm Hg in Frage. An sich wäre auch das Druckgebiet oberhalb 1 mm noch geeignet, doch bei der kurzen freien Weglänge ist die Absorption schon bei verhältnismäßig geringen Elektronenkonzentrationen sehr groß.

## 3. Argon

Mit Argon waren die Verhältnisse ganz ähnlich wie bei Neon. Es zeigte sich auch wieder ein Druckgebiet, in dem die Elektronenkonzentration so hoch war, daß überhaupt keine Wellen mehr durch das Entladungsgefäß hindurchgingen. Dieses Gebiet kam für die Messungen nicht in Frage. Bei tieferen Drucken dagegen, bis zum Verlöschen der Entladung, konnten Messungen ausgeführt werden.

#### 4. Stickstoff

Mit Stickstoff zeigten sich dagegen wieder größere Schwierigkeiten. Das zusätzliche elektrische Feld vom Wolframdraht radial nach außen war zur gleichmäßigen Verteilung der Entladung wieder notwendig. Außerdem mußte der Poulsen-generator so stark belastet werden, daß er anfing, ziemlich inkonstant zu arbeiten. Ein Gebiet so hoher Elektronenkonzentration, daß keine Wellen mehr durch das Gefäß gingen, konnte nicht erreicht werden. Jedenfalls war aber auch mit reinem Stickstoff eine deutliche Drehung der Polarisationsebene zu erzielen und man kann sagen, daß in reinem Stickstoff bedeutend höhere Elektronenkonzentrationen zu erzeugen sind als in Luft unter sonst gleiche Umständen, was für die Tatsache spricht, daß die Lebensdauer freier Elektronen Sauerstoff gegenüber viel geringer ist als Stickstoff oder gar Edelgasen gegenüber.

#### 5. Wasserstoff

Ohne Magnetfeld zeigte Wasserstoff bei Anregung durch den Poulsengenerator im Druckgebiet von etwa  $1 \cdot 10^{-1}$  bis  $9 \cdot 10^{-3}$  mm Hg ein fahles graugrünes Leuchten, wobei aber die Trägerdichte noch nicht ausreichte, merkliche Absorption oder Änderung des Brechungsindex hervorzurufen. Bei tieferen Drucken, von  $9 \cdot 10^{-3}$  bis  $5 \cdot 10^{-3}$  mm Hg zeigte sich dann ein grettes rotes Leuchten, wobei bis zu 50% Absorption einsetzte und auch Verschiebungen im Interferometer beobachtet wurden. Mit Magnetfeld hingegen war nur das fahle graugrüne Leuchten zu erreichen und da zeigte sich wiederum weder eine merkliche Absorption noch eine Änderung des Brechungsindex.

#### § 5. Gang der Messungen

*Der Gang einer Messung war folgender.* Zunächst wurde im Interferometer der Spiegel  $Sp_2$  (Fig. 7) entfernt und durch Drehung des Empfängers  $E'$  das Maximum der Intensität gesucht. Dann wurde der Poulsengenerator und das Magnetfeld eingeschaltet und der Empfänger gedreht, bis die Intensität wieder ein Maximum war. Der Empfänger  $E$  (vgl. Fig. 7) wurde dabei zur Kontrolle der Senderintensität benutzt. Dann wurde zur Messung des Brechungsindex der Spiegel  $Sp_2$  wieder eingesetzt und ein Interferenzminimum gesucht. Nach Abschalten der Entladung und des Magnetfeldes wurde das Interferometer wieder auf ein Minimum eingestellt.

Die so erhaltene Meßreihe wurde zur Kontrolle mit entgegengesetztem gerichtetem Magnetfeld wiederholt.

Die Absorption ergab sich einfach aus der Messung der Drehung der Polarisationsebene durch das Verhältnis der Intensitäten von ursprünglichem (d. h. ohne Ionisierung des Gases) und gedrehtem Maximum.

Um die Verhältnisse im Entladungsgefäß nicht zu verändern, wurde auch bei der Messung des Brechungsexponenten das Magnetfeld beibehalten. Um ferner eine Verunreinigung durch Gasabgabe bei der Entladung zu vermeiden, wurden die

Messungen in strömendem Gas ausgeführt.

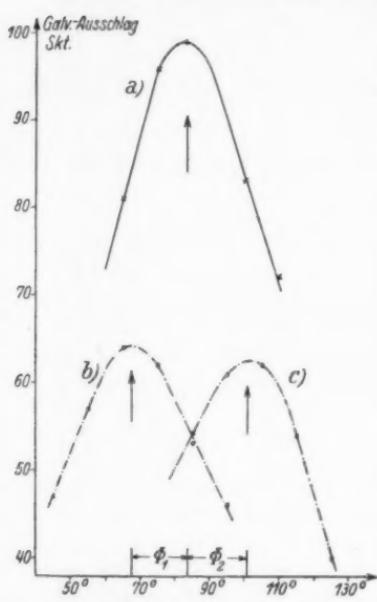


Fig. 10. Messung der Drehung der Polarisationsebene und der Absorption

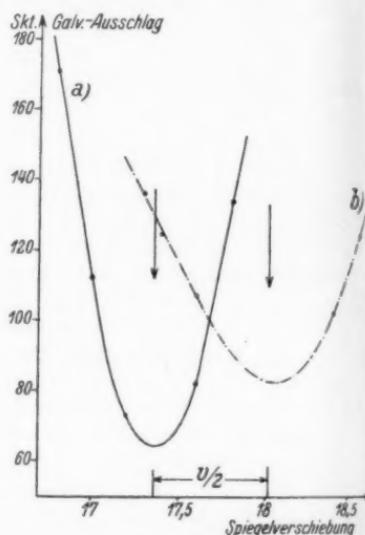


Fig. 11. Messung des Brechungsexponenten

Als Beispiel seien die Kurven einer Messung an Neon bei  $4 \cdot 10^{-3}$  mm Hg wiedergegeben. In Fig. 10 gibt Kurve *a* das Maximum der Intensität, wenn Sender und Empfangsantenne in ihrer Richtung übereinstimmen. Als Abszisse ist hierbei der Drehwinkel des Empfängers von einem beliebig gewählten Nullpunkt aus aufgetragen. Nach Einschalten der Entladung und eines Magnetfelds von 38,7 Gauss in Richtung Sender-Empfänger wurde Kurve *b* gefunden. Der Drehwinkel  $\Phi_1$  betrug  $15,9^\circ$ . Die Absorption betrug  $33\%$ . Nach

Umpolen des Magnetfeldes war die Polarisationsebene nach der anderen Seite um den Winkel  $\Phi_2 = 17,4^\circ$  gedreht (Kurve *c*). Die zugehörige Messung im Interferometer ist in Fig. 11 wiedergegeben. Hier sind als Abszissen die Wagenstellungen und als Ordinaten die Intensitäten im Empfänger *E* aufgetragen. Kurve *a* gibt das Interferenzminimum ohne Anregung. Mit Anregung wurde *b* gefunden. Aus beiden Kurven ergibt sich  $\frac{v}{2} = 6,5$  mm.

#### § 6. Theoretischer Zusammenhang zwischen Trägerdichte, Brechungsindex, Drehwinkel und Stoßzahl

Über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in ionisierten Gasen mit und ohne Magnetfeld liegen eine große Reihe von theoretischen Arbeiten vor.<sup>10-16)</sup> Ich verweise vor allem auf das Buch von Pedersen<sup>14)</sup>, außerdem auf eine ausführliche Literaturzusammenstellung bei Sven Benner<sup>17)</sup> und W. Hasselbeck.<sup>18)</sup>

Angenommen eine linear polarisierte Welle mit der elektrischen Feldstärke  $E = E e^{i\omega t}$  bewege sich in Richtung eines Magnetfeldes *H*, dann liefert die Dispersionstheorie<sup>18)</sup> die Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  für die beiden zirkularpolarisierten Komponenten der linear polarisierten Welle zu:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1^2 = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega} \frac{1}{\omega + \frac{e\Phi}{mc} - iS_1}, \\ n_2^2 = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega} \frac{1}{\omega - \frac{e\Phi}{mc} - iS_2}. \end{array} \right.$$

Dabei bedeutet *N* die Trägerkonzentration, *e* und *m* sind Ladung und Masse der Träger. *S* bedeutet die Stoßzahl der Träger mit anderen Trägern und Molekülen. Die Geschwindigkeit der mit den beiden zirkularen Komponenten schwingenden Träger wird wegen der Einwirkung des Magnetfeldes verschieden sein, deshalb sind auch die Stoßzahlen *S*<sub>1</sub> und *S*<sub>2</sub> etwas verschieden; da aber die Stoßzahlen *S* gegen  $\omega$  bei den benutzten Drucken immer klein bleiben, kann man unbedenklich statt *S*<sub>1</sub> und *S*<sub>2</sub> ein mittleres *S* setzen.

Der Brechungsindex erscheint in einer komplexen Form, weil noch Absorption vorhanden ist.

$$(2) \quad n = n - ik.$$

Hier ist *n* der reelle Brechungsindex und *k* der auf die Schichtdicke einer Vakuumwellenlänge bezogene Absorptionskoeffizient

der Schwingungsamplitude, d. h.  $k$  ist durch die Beziehung definiert, daß die Amplitude  $A$  am Ende einer durchlaufenden Schicht von der Dicke  $l$  zu derjenigen ( $A_0$ ) beim Eintritt in die Schicht in der Beziehung steht

$$(2a) \quad A = A_0 e^{-2\pi k \frac{l}{\lambda}} \quad (\lambda \text{ Wellenlänge im Vakuum}).$$

$e \mathfrak{H}/m c$  hat die Dimension einer Frequenz und es soll

$$(2b) \quad \frac{e \mathfrak{H}}{m c} = \omega_M$$

gesetzt werden.\*)

Die Trennung von realem und imaginärem Teil in (1) unter Berücksichtigung von (2) ergibt:

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} n_1^2 - k_1^2 \\ n_2^2 - k_2^2 \end{array} \right\} = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega} \frac{\omega \pm \omega_M}{(\omega \pm \omega_M)^2 + S^2}$$

und

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} 2n_1 k_1 \\ 2n_2 k_2 \end{array} \right\} = \frac{4\pi Ne^2}{m\omega} \frac{S}{(\omega \pm \omega_M)^2 + S^2}.$$

Aus (3) und (4) folgt

$$(5) \quad \left. \begin{array}{l} n_1^2 \\ n_2^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2(\beta^2 + S^2)} \{ \sqrt{[(\beta^2 + S^2) - \alpha\beta]^2 + \alpha^2 S^2} + \beta^2 + S^2 - \alpha\beta \}$$

und

$$(6) \quad \left. \begin{array}{l} k_1^2 \\ k_2^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2(\beta^2 + S^2)} \{ \sqrt{[(\beta^2 + S^2) - \alpha\beta]^2 + \alpha^2 S^2} - \beta^2 - S^2 + \alpha\beta \}.$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{4\pi Ne^2}{m\omega} \quad \text{und} \quad \beta = \omega \pm \omega_M$$

gesetzt. Diese ausführlichen Gl. (5) und (6) lassen sich für die praktische Anwendung unter zwei Bedingungen wesentlich vereinfachen:

1.  $k^2 \ll n^2$ .

Bei den vorliegenden Messungen war  $k^2$  stets kleiner als  $1\%$  von  $n^2$ , so daß  $k^2$  ohne weiteres gegen  $n^2$  vernachlässigt werden durfte.

2.  $n_1 k_1 = n_2 k_2$ .

Die Zulässigkeit dieser Bedingung kann man am besten aus Gl. (4) abschätzen. Sie gilt, wenn  $\omega \gg \omega_M$  ist. Bei den

\*) Den Fall, daß  $\omega_M = \omega$  wird, haben S. Benner<sup>17)</sup> und G. Todesco<sup>22)</sup> untersucht.

Versuchen war  $\omega = 4,7 \cdot 10^{10}$ /sec,  $\omega_M$  bei den stärksten verwendeten Feldern von etwa 75 Gauss =  $1,4 \cdot 10^9$ /sec, also tatsächlich bei den stärksten Feldern  $\omega \gg \omega_M$ .

Unter Berücksichtigung dieser beiden Bedingungen ergeben sich aus (3) und (4):

$$(7) \quad \left. \frac{n_1^2}{n_2^2} \right\} = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega} \frac{\omega \pm \omega_M}{(\omega \pm \omega_M)^2 + S^2},$$

$$(8) \quad 2n_1 k_1 = 2n_2 k_2 = \frac{4\pi Ne^2}{m\omega} \frac{S}{\omega^2 + S^2}.$$

Ohne Magnetfeld ( $\mathfrak{H} = 0$ , deshalb  $\omega_M = 0$ ,  $n = n_0$ ) sind die entsprechenden Beziehungen

$$(7a) \quad n_0^2 = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 + S^2},$$

$$(8a) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2n_0 k_0 = \frac{4\pi Ne^2}{m\omega} \cdot \frac{S}{\omega^2 + S^2} = 2n_1 k_1 = 2n_2 k_2 \\ = \frac{S}{\omega} (1 - n_0^2). \end{array} \right.$$

Die Drehung  $\Phi$  der Polarisationsebene für die Schichtdicke  $l$  ergibt sich zu:

$$(9) \quad \Phi = \frac{\pi l}{\lambda} (n_1 - n_2)^{10}.$$

Unter Benutzung von Gl. (7) wird

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \frac{\pi l}{\lambda} \left\{ + \sqrt{1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega} \frac{\omega + \omega_M}{(\omega + \omega_M)^2 + S^2}} \right. \\ \left. - \sqrt{1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega} \frac{\omega - \omega_M}{(\omega - \omega_M)^2 + S^2}} \right\}. \end{array} \right.$$

Die hier aufgestellten Gleichungen gelten an sich für alle Arten von Trägern. Wenn es sich um ein ionisiertes Gas handelt, so sind positive und negative Ionen und außerdem freie Elektronen vorhanden. Nimmt man an, daß bei allen drei Gattungen die Konzentration von der gleichen Größenordnung ist, so kann der Einfluß der Ionen sowohl auf die Brechung wie auch auf die Drehung der Polarisationsebene vernachlässigt werden. Ist jedoch die Ionenkonzentration sehr viel größer als die Elektronenkonzentration, so würden die Ionen zur Änderung des Brechungsindex einen wesentlichen Beitrag liefern, während sich die positiven und negativen Ionen bei gleicher Ladung, Masse und Konzentration in der

Wirkung auf die Drehung der Polarisationsebene aufheben. Um gleich hier vorwegzunehmen, bestätigten die Messungen die Annahme, daß die Dichte der Ionen nicht so groß ist, daß ein Einfluß auf die Brechung stattfinden kann. Im folgenden sei deshalb immer nur von *Elektronenkonzentration* die Rede;  $e$  und  $m$  seien Ladung und Masse der Elektronen.

### § 7. Auswertung der Meßergebnisse

Mißt man die Verschiebung im Interferometer  $v$ , so ist der Brechungsindex

$$(11) \quad n = 1 - \frac{v + k \lambda}{l} \quad \left\{ \begin{array}{l} l = \text{Schichtlänge in Zentimeter,} \\ \lambda = \text{Wellenlänge in Zentimeter,} \\ k = 0, 1, 2, 3 \dots \end{array} \right.$$

Wenn ferner die durchgehende Intensität ohne Anregung  $J_0$ , mit Anregung  $J$  ist, so ist nach Gl. (2a):

$$(12) \quad k = \frac{\lambda}{4\pi l} \ln \frac{J_0}{J}.$$

Aus (8a) folgt:

$$(13) \quad S = \frac{2 n_0 k \omega}{1 - n_0^2}$$

und aus Gl. (7a):

$$(14) \quad N = \frac{m \omega^2}{4\pi e^2} \left[ (1 - n_0^2) + \frac{4 n^2 k^2}{1 - n_0^2} \right].$$

Setzt man die Werte von  $N$  und  $S$  aus Gl. (13) und (14) und den Wert von  $\omega_M$  aus Gl. (2b) ein, so folgt  $n_1$  und  $n_2$  und daraus die Drehung der Polarisationsebene

$$\Phi = \frac{2\pi l}{\lambda} (n_1 - n_2).$$

Dabei ist noch eines zu bedenken. Die Gl. (13) und (14) enthalten  $n_0$  den Brechungsexponenten des ionisierten Gases ohne Magnetfeld. Tatsächlich wurde nicht dieser Brechungsexponent gemessen. Das Ausschalten des Magnetfeldes würde die Ionisierungsverhältnisse vollkommen geändert haben; man würde also nicht denjenigen Wert von  $N$  gemessen haben, der bei den Messungen der Drehung der Polarisationsebene tatsächlich vorhanden war. Gemessen wurde durch die Interferenzmethode „der Brechungsexponent mit Magnetfeld“. Was die Interferenzmethode in einem solchen Fall tatsächlich mißt, ist, wie eine einfache Überlegung zeigt, der arithmetische Mittelwert

$$\bar{n} = \frac{1}{2} (n_1 + n_2)$$

der Brechungsexponenten der beiden zirkular polarisierten Wellen. Für diesen gilt nach Gl. (7)

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\bar{n} = + \sqrt{1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega} \frac{\omega + \omega_M}{(\omega + \omega_M)^2 + S^2}} \\ \quad + \sqrt{1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega} \frac{\omega - \omega_M}{(\omega - \omega_M)^2 + S^2}}. \end{array} \right.$$

Führt man zur Abkürzung ein

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_1 = \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 + S^2} \left( 1 - \frac{S^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega_M}{\omega}} \right), \\ \mathcal{A}_2 = - \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 + S^2} \left( 1 - \frac{S^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\omega_M}{\omega}} \right), \end{array} \right.$$

so ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (7a)

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\bar{n} = \sqrt{1 - \frac{1 - n_0^2}{\mathcal{A}_1}} + \sqrt{1 - \frac{1 - n_0^2}{\mathcal{A}_2}} \\ \quad = 2n_0 + \frac{1 - n_0^2}{2n_0^2} (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \\ \quad \quad \quad - \frac{1 - n_0^2}{2n_0^2} \left( 1 + \frac{1 - n_0^2}{4n_0^2} \right) (\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2). \end{array} \right.$$

Nun unterscheiden sich  $\mathcal{A}_1$  und  $-\mathcal{A}_2$  nach Gl. (16) nur um das Glied  $\frac{S^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega_M}{\omega}$ ; es ist also mit großer Annäherung

$$\mathcal{A}_1 = -\mathcal{A}_2.$$

Ferner ist nach Gl. (17) der Unterschied zwischen  $\bar{n}$  und  $n_0$  von der Größenordnung von  $\mathcal{A}_1^2$  bzw.  $\mathcal{A}_2^2$  bzw.  $\left(\frac{\omega_M}{\omega}\right)^2$ . Man macht also auf keinen Fall einen über die Fehlergrenzen der Versuche hinausgehenden Fehler, wenn man statt  $n_0$  den durch die Interferenzmessungen gelieferten Wert  $\bar{n}$  verwendet.

In nachstehender Tab. 2 sind die gemessenen und gerechneten Daten zusammengestellt.

Die Übereinstimmung der berechneten und gemessenen Werte von  $\Phi$  ist durchweg als gut zu bezeichnen. Die etwas größere Abweichung bei Stickstoff ist leicht erklärlieh: mit

Tabelle 2

Gas	Magnetfeld- strom in Amp.*)	Druck $\times 10^{-3}$ mm Hg	$n$ im Inter- ferometer gemessen	Absorption in %	$N$ aus (14) $\times 10^{11}$ cm <sup>-3</sup>	$\Phi$ aus (10) berechnet in °	$\Phi$ gemessen in °	Abweichung $\Phi_{\text{ber.}} - \Phi_{\text{gem.}}$ in °
Neon	52,5	40	0,608	33	4,10	14,4	15,9	- 1,5
	70,0	30	0,430	55	5,31	32,3	31,4	+ 0,9
Argon	87,0	4	0,969	5	0,40	1,5	1,6	- 0,1
	92,5	15	0,779	21	2,54	12,8	13,0	- 0,2
	92,5	15	0,795	20	2,39	12,0	11,6	+ 0,4
	82,0	17	0,782	14	2,52	11,2	12,1	- 0,9
	87,0	42	0,618	91	4,08	23,0	24,4	- 1,4
	101,0	40	0,451	93	5,21	43,4	42,6	+ 0,8
	86,0	120	0,404	67	5,45	42,5	44,75	- 2,25

Stickstoff war es sehr schwer konstante Ionisierung zu erhalten.

Man kann nun mit Recht einwerfen, daß ja sowohl die Bestimmung des Drehwinkels der Polarisationsebene als auch die der Verschiebung im Interferometer nicht eindeutig sind. Der Drehwinkel  $\Phi$  ist nur bis auf ein ganzes Vielfaches von  $180^\circ$  bestimmt. Nun zeigt sich aber, daß  $\Phi > 180^\circ$  bei den verwendeten Magnetfeldern Elektronenkonzentrationen liefert, die weit höher sind, als die kritische Konzentration, für die der Brechungsindex zu Null wird. Es kommen also nur kleinere Winkel als  $180^\circ$  in Frage, d. h. praktisch ist die Bestimmung der Drehung der Polarisationsebene eindeutig. Anders verhält es sich mit der Verschiebung der Interferenzen. Die Verschiebung  $v$  ist nur bis auf ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge bestimmt. Also

$$v' = v + p\lambda.$$

In Tab. 3, erste Spalte, sind nun die  $N$ -Werte für  $p = 0, 1, 2$  und  $3$  aufgetragen, und zwar bestimmt an Argon bei  $15 \cdot 10^{-3}$  mm Hg aus der Verschiebung  $v = 11,7$  mm mit  $B_{16}$ , dem meist verwendeten Empfänger, dem eine Wellenlänge  $\lambda = 4,15$  cm zuzuordnen ist.

Andererseits errechnet sich aus dem gemessenen Drehwinkel der Polarisationsebene nach (10)  $N$  zu  $2,49 \cdot 10^{11}/\text{cm}^3$ . Man erkennt deutlich, daß dieser Wert nur dem für  $p = 1$  und keinem anderen zuzuordnen ist.

\*<sup>1</sup> 100 Amp. entsprechen 74 Gauss.

Tabelle 3

Mit $B_{16}$ $\lambda = 4,15$ cm	Aus der Drehung $\Phi = 13,0^\circ$	Mit $B_{18}$ $\lambda = 3,72$ cm
$p = 0 \quad N = 0,603 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$		$0,437 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$
$p = 1 \quad N = 2,54 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$		$2,64 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$
$p = 2 \quad N = 4,05 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$	$N = 2,49 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$	$4,47 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$
$p = 3 \quad N = 5,21 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$		$5,92 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$

Um aber tatsächlich zu beweisen, daß diese Zuordnung richtig ist, wurde ein zweiter Empfänger  $B_{18}$  mit etwas kürzerer Antenne und  $\lambda = 3,72$  cm verwendet. Im Interferometer wurde nun die Verschiebung mit  $B_{16}$  und  $B_{18}$  unmittelbar nacheinander gemessen.  $B_{18}$  lieferte die in der 3. Spalte der Tab. 2 aufgetragenen Werte und bestätigt damit die getroffene Zuordnung.

Bei den übrigen Messungen wurde die Verschiebung im Interferometer immer nur mit  $B_{16}$  allein bestimmt, doch war die Zuordnung niemals in Frage gestellt.  $B_{16}$  war auf den Sender genau abgestimmt. Die Werte der Drehung wurden mit  $B_{17}$ , dem eine Wellenlänge  $\lambda = 3,98$  cm entsprach, gemessen.

#### § 8. Diskussion der Versuchsbedingungen

##### 1. Periodische Anregung

Bei der Berechnung der Elektronenkonzentrationen wird vorausgesetzt, daß sie zeitlich konstant sind, d. h. daß die Anregung kontinuierlich ist. Tatsächlich war die Anregung durch den Poulsengenerator aber periodisch. Seine Wellenlänge war 1600 m, d. h. der zeitliche Abstand eines Spannungsmaximums vom nächsten ist etwa  $5 \cdot 10^{-6}$  sec. Es ist aber nach Dänzer (6) die Lebensdauer freier Elektronen, gemessen unter ganz ähnlichen Bedingungen an Argon sicher größer als  $2 \cdot 10^{-3}$  sec., d. h. die Zahl der freien Elektronen verringert sich während der Anregungspausen nicht nennenswert.

##### 2. Inhomogenität des Magnetfeldes

Für die Berechnung der Elektronenkonzentration ist weiterhin ein homogenes Magnetfeld vorausgesetzt. Bei konstanter Elektronendichte ist der Drehwinkel der Polarisationsebene in erster Näherung der Stärke des Magnetfeldes proportional. Daraus folgt, daß es gestattet ist, mit großer Näherung das inhomogene Magnetfeld durch ein homogenes zu ersetzen, dessen Stärke der Mittelwert aus dem inhomogenen Feld ist. Das magnetische Feld der Spule und sein örtlicher

Mittelwert wurde nach Untersuchungen von K. Bartz (20) berechnet. Die Ausmessung des Magnetfeldes an einigen Punkten mittels einer kleinen Probespule ergab gute Übereinstimmung mit den berechneten Werten.

### 3. Wechselstrom-Magnetfeld der Anregungsspule

Außer dem Gleichstrommagnetfeld verursacht auch das Magnetfeld des Wechselstroms in der Anregungsspule eine Drehung der Polarisationsebene. Der effektive Wechselstrom war etwa maximal 25 Amp. Seine Wirkung muß eine Verbreiterung des die Lage der Polarisationsebene anzeigen den Maximums ergeben. Tatsächlich wurde auch eine Verbreiterung des Maximums mit Anregung und Magnetfeld gegenüber dem ohne Anregung und Magnetfeld gemessenen festgestellt. Dieser Effekt ist aber für die Messungen solange ohne Bedeutung, als das Maximum so scharf bleibt, daß seine Lage gut zu bestimmen ist.

### 4. Die räumliche Inhomogenität der Elektronenkonzentrationen

muß ebenfalls eine Verbreiterung des Maximums, das die Lage der Polarisationsebene bestimmt, verursachen und ebenso die Maxima und Minima der Interferenzkurve verflachen. Doch scheint diese Inhomogenität nicht allzu groß gewesen zu sein, weil bei allen Messungen sowohl die Polarisationsmaxima, als auch die Interferenzminima deutlich ausgeprägt blieben.

### § 9. Zusammenfassung

1. Mit gedämpften elektrischen Wellen von etwa 4 cm Länge wurde die durch ein Magnetfeld hervorgerufene Drehung der Polarisationsebene (Faradayeffekt) an ionisierten Gasen nachgewiesen und gemessen.

2. Gleichzeitig wurde auch der Brechungsindex und Absorptionskoeffizient bestimmt.

3. Entnimmt man aus dem Brechungsexponenten den Wert der Elektronenkonzentration, so läßt sich die Größe der Drehung der Polarisationsebene auch berechnen. Die so berechnete Drehung stimmte mit der gemessenen innerhalb der Fehlergrenzen überein.

4. In Neon, Argon und Stickstoff gelang die Erzeugung der notwendigen hohen Elektronenkonzentrationen ( $3 \cdot 10^{10}$  bis  $6 \cdot 10^{11}/\text{cm}^3$ ), während es in Luft und Wasserstoff nicht möglich war, genügend hohe Elektronendichten zu erhalten.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Hrn. Geheimrat Prof. Dr. Zenneck im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München ausgeführt. Ich benutze gerne die Gelegenheit, ihm für die stets bereite Unterstützung und fördernde Teilnahme meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Desgleichen bin ich Herren Prof. Dr. Kulenkampff und Dr. Goubau für viele wertvolle Ratschläge zu großem Dank verpflichtet.

#### Literatur

- 1) Müller Pouille's Optik II. Hälfte. II. Teil. S. 2118, 1929.
- 2) E. V. Appleton, El. **98**, S. 256, 1927.
- 3) E. V. Appleton, Nature **128**, S. 1037, 1931.
- 4) P. O. Pedersen, *The propagation of radio waves*. Kopenhagen 1927.
- 5) A. Székely, Ann. d. Phys. [5] **3**, S. 112, 1929; dort weitere Lit.
- 6) H. Dänzer, Ann. d. Phys. [5] **2**, S. 27, 1929.
- 7) J. Zenneck u. H. Rukop, *Drahl. Telegraphie*. Stuttgart 1929. S. 49 u. 202.
- 8) W. Hasselbeck, Ann. d. Phys. [5] **12**, S. 477, 1932.
- 9) Handbuch H. Geiger u. K. Scheel **XII**, S. 124.
- 10) E. V. Appleton, Proc. Phys. Soc. London **37**, S. 22, 1925.
- 11) H. W. Nichols u. J. C. Schelleng, Bell. Syst. Tech. Journ. **4**, S. 215, 1925.
- 12) A. H. Taylor u. E. O. Hulbert, Phys. Rev. **27**, S. 189, 1926.
- 13) G. Breit u. M. A. Tuve, Phys. Rev. **28**, S. 54, 1926.
- 14) G. Breit, Proc. of the Inst. of Radio Engineers **15**, S. 709, 1927.
- 15) E. O. Hulbert, Phys. Rev. **29**, S. 706, 1927.
- 16) C. Schekulin, Ztschr. f. Hochfr. Techn. **36**, S. 172, 1930.
- 17) S. Benner, Diss. Stockholm 1931.
- 18) H. A. Lorentz, *The theory of Electrons*. 2. Aufl. Leipzig 1916.
- 19) W. Voigt, Graetz'sches Handb. der El. u. des Mag. **IV**, 451.
- 20) K. Bartz, Aachener Diss. 1908.
- 21) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44**, S. 92, 1891.
- 22) G. Todesco, Alta Frequenza **1**, S. 68, 1932.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 25. September 1932)

**Beiträge zur Theorie  
der geometrischen Elektronenoptik**  
**Von Johannes Picht**

(Mit 2 Figuren)

**Inhalt:** § 1. Die Grundgleichungen der Elektronenstrahlen. — § 2. Die Potentialfunktion  $\varphi = \varphi(\varrho, z)$ . — § 3. Die Differentialgleichung der paraxialen Elektronenstrahlen. — § 4. Anwendung von (18) [§ 3] auf eine spezielle einfache Potentialverteilung. — § 5. Umformung der Differentialgleichung (18) [§ 3]. — § 6. Die zugehörige Riccatische Differentialgleichung. — § 7. Integration der Differentialgleichung (22) [§ 5] durch Reihenentwicklung. — § 8. Integration der Differentialgleichung (18) [§ 3] durch Reihenentwicklung. — § 9. Weitere Umformung der Differentialgleichung (18) [§ 3] für den Fall, aus bekanntem  $\varrho = \varrho(z)$  die Funktion  $\Phi = \Phi(z)$  zu berechnen. — § 10. Integration von (35) [§ 9] durch Reihenentwicklung. — § 11. Ausführung der Integration für einige spezielle Fälle. — § 12. Die partiellen Differentialgleichungen der Elektronenoptik. — § 13. Einige elektronenoptische Folgerungen aus (17) [§ 3]. — § 14. Zwei Fundamentalstrahlen. — § 15. Berechnung der zu einer vorgegebenen Brennweite gehörigen Potentialverteilung. — § 16. Angenäherte Bestimmung der Brechkraft einer gegebenen Potentialverteilung. — § 17. Brechkraft einer Reihe aufeinanderfolgender Medien von verschiedenem Brechungsindex, verschiedenen gekrümmten Begrenzungsfächen und gleicher, sehr kleiner Mittendicke. — § 18. Berechnung der Lage zweier (spezieller) konjugierter Punkte und des Vergrößerungsverhältnisses in ihnen im Anschluß an Gullstrands „Die optische Abbildung in heterogenen Medien...“ — § 19. Berechnung der Brechkraft und der Lage der Hauptpunkte unter Benutzung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen. — § 20. Berechnung der Brechkraft und der Lage der Hauptpunkte im Anschluß an Gullstrand.

In verschiedenen in der letzten Zeit erschienenen Arbeiten<sup>1)</sup> ist experimentell gezeigt worden, daß auf die Elektronen und auf Elektronenstrahlenbündel die Gesetze der geometrischen Optik angewandt werden können. Als elektronenoptische „Linsen“ und „Spiegel“ dienen hierbei magnetische oder elektrische Felder. Nur mit *elektrischen* Linsen wollen wir uns in dieser Arbeit beschäftigen. Das Eigentümliche dieser Linsen ist — und darin unterscheidet sich die Elek-

1) z. B. M. Knoll u. E. Ruska, *Ann. d. Phys.* [5] **12**. S. 607. 1932; E. Brüche, *Naturw.* **20**. S. 49. 1932; E. Brüche u. H. Johannson, *Naturw.* **20**. S. 353. 1932.

tronenoptik von der in der Praxis meist benutzten *Lichtoptik* —, daß es sich hier um Linsen mit örtlich variablem Brechungsindex handelt. Es gibt indessen — worauf schon wiederholt hingewiesen wurde — auch in der *Lichtoptik* Linsen mit örtlich und zeitlich variablem Brechungsindex, nämlich z. B. die Linsen des menschlichen oder tierischen Auges. Und auch die Theorie dieser „inhomogenen“ Medien ist schon verhältnismäßig weit entwickelt worden<sup>1)</sup>, so daß es naheliegt, jene Theorie auf die *Elektronenoptik* zu übertragen.

### § 1. Die Grundgleichungen der Elektronenstrahlen

Die von der Kathode ausgehenden Elektronen erfahren durch die zwischen Anode und Kathode liegende Spannung  $E$  eine Beschleunigung. Nach Durchlaufen der Spannung  $E$  besitzen sie so die Geschwindigkeit  $v_0$ , die sich aus  $E$  und der Masse  $m$  der Elektronen nach der bekannten Formel  $\frac{1}{2}mv_0^2 = e \cdot E$  berechnet. Durchlaufen die Elektronen nun ein weiteres Potentialgefälle  $\varphi = \varphi(\varrho, z)$ , wo  $z$  die Fortpflanzungsrichtung der Elektronen bzw. die Achse des Elektronenstrahlenbündels ist, so gilt:

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = e(E - \varphi)$$

und andererseits

$$(2) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{e}{m} \operatorname{grad} \varphi,$$

also auch:

$$(3) \quad \frac{d^2 \varrho}{dt^2} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}.$$

### § 2. Die Potentialfunktion $\varphi = \varphi(\varrho, z)$

Hr. Prof. v. Laue, der mich zu dieser Arbeit anregte, und dem ich für diese Anregung herzlich danke, machte mich darauf aufmerksam, daß zwischen den Werten  $\varphi(\varrho, z)$  des axial-symmetrischen Potentials an der Stelle  $(\varrho, z)$  und den Werten  $\varphi(0, z) = \Phi(z)$  dieses Potentials an den Stellen  $(\varrho = 0, z)$ , d. h. auf der Achse eine einfache Beziehung besteht. Denken wir uns nämlich  $\varphi(0, z) = \Phi(z)$  in ein *Fouriersches Integral* umgeformt, also

1) L. Hermann, Pflügers Archiv f. d. ges. Physiologie 27. S. 310. 1882; L. Mathiessen, Pflügers Archiv f. d. ges. Physiologie 32. S. 101. 1883; A. Gullstrand, Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar 43. Nr. 2.

$$(4) \quad \varphi(0, z) = \Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikz} dk,$$

wo

$$(5) \quad a_k = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) e^{-ikz} dz$$

ist, so ist

$$(6) \quad \varphi(\varrho, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a_k J_0(ik\varrho) e^{ikz} dk,$$

wo  $J_0(ik\varrho)$  die vom Argument  $ik\varrho$  genommene Besselsche Funktion 1. Art und nullter Ordnung ist.

Daß  $\varphi(\varrho, z)$  der Laplaceschen Gleichung  $\mathcal{A}\varphi = 0$  genügt, erkennt man sofort, wenn man beachtet, daß

$$\mathcal{A}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

ist, und daß nach bekannten Formeln über Besselsche Funktionen

$$(7) \quad \frac{d J_0(\xi)}{d \xi} = -J_1(\xi)$$

$$(8) \quad \frac{d^2 J_0(\xi)}{d \xi^2} = -J_0(\xi) + \frac{1}{\xi} J_1(\xi)$$

ist.

Entwickeln wir jetzt  $\varphi(\varrho, z)$  nach Potenzen von  $\varrho$ , so erhalten wir zunächst wegen der axialen Symmetrie

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\varrho, z) = \varphi(0, z) + \frac{\varrho^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} \right)_{\varrho=0} + \frac{\varrho^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \varrho^4} \right)_{\varrho=0} + \dots \\ \quad + \frac{\varrho^{2m}}{(2m)!} \left( \frac{\partial^{2m} \varphi}{\partial \varrho^{2m}} \right)_{\varrho=0} + \dots \end{array} \right.$$

Beachtet man nun die oben angegebenen Gl. (4)–(6), so leitet man leicht ab, da

$$\left( \frac{d^{2m} J_0(ik\varrho)}{d \varrho^{2m}} \right)_{\varrho=0} = k^{2m} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2},$$

daß

$$(10) \quad \left( \frac{\partial^{2m} \varphi}{\partial \varrho^{2m}} \right)_{\varrho=0} = (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \left( \frac{\partial^{2m} \varphi}{\partial z^{2m}} \right)_{\varrho=0}.$$

Setzen wir dies in (9) ein und schreiben wieder  $\varphi(0, z) = \Phi(z)$ , so erhalten wir

(11)

wir  
sich  
die I  
etwa  
hina  
rech  
lich  
Ist d  
nach  
gebe  
wirk  
gleic

(12)

(13)

§ 3.

in (

(15)

Pa  
Rei

(16)

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\varrho, z) = \Phi(z) - \frac{1}{4} \varrho^2 \frac{d^3 \Phi}{dz^3} + \frac{1}{32} \varrho^4 \frac{d^4 \Phi}{dz^4} - \frac{1}{2304} \varrho^6 \frac{d^6 \Phi}{dz^6} \\ \quad + \frac{1}{147456} \varrho^8 \frac{d^8 \Phi}{dz^8} + \dots \\ \quad + (-1)^m \frac{1}{2^m (m!)^2} \varrho^{2m} \frac{d^{2m} \Phi}{dz^{2m}} + \dots \end{array} \right.$$

Ist die Aufgabe gegeben, die für eine bestimmte „Linsenwirkung“ erforderliche Verteilung  $\varphi(\varrho, z)$  zu berechnen, so läßt sich diese Aufgabe demnach auf die einfachere zurückführen, die Funktion  $\Phi(z)$  zu bestimmen. Es ist dann nur notwendig, etwa unter Benutzung der Gl. (11) den Wert von  $\varphi(\varrho, z)$  für hinreichend von der Achse entfernte Punkte ( $\varrho \neq 0, z$ ) zu berechnen und dafür zu sorgen, daß an diesen Stellen das wirklich vorhandene Potential mit dem errechneten übereinstimmt. Ist diese Übereinstimmung erzielbar oder erzielt, so ist demnach auch der Potentialverlauf im ganzen Feld eindeutig gegeben; insbesondere das errechnete  $\Phi(z)$  praktisch verwirklicht.

Für spätere Zwecke merken wir uns im Anschluß an (10) gleich noch einige spezielle Formeln. Es ist für  $\varrho = 0$ :

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho \partial z} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \varrho^3} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \varrho \partial z^2} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \varrho^3 \partial z} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \varrho \partial z^3} = \dots = 0;$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^3 \Phi}{dz^3}; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \varrho^2 \partial z} = -\frac{1}{2} \frac{d^3 \Phi}{dz^3}; \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \varrho^3 \partial z^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^4 \Phi}{dz^4}; \quad \dots \end{array} \right.$$

$$(14) \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \varrho^4} = +\frac{3}{4} \frac{d^4 \Phi}{dz^4}; \quad \frac{\partial^5 \varphi}{\partial \varrho^4 \partial z} = +\frac{3}{4} \frac{d^5 \Phi}{dz^5}; \quad \dots$$

### § 3. Die Differentialgleichung der paraxialen Elektronenstrahlen

Wir kehren zu den Gl. (1) und (3) zurück. Setzen wir in (3) den Wert von  $\varphi$  aus (11) ein, so wird

$$(15) \quad \frac{d^2 \varrho}{dt^2} = +\frac{e}{m} \left( \frac{\varrho}{2} \frac{d^3 \Phi}{dz^3} - \frac{\varrho^3}{8} \frac{d^4 \Phi}{dz^4} + \frac{\varrho^5}{384} \frac{d^6 \Phi}{dz^6} - \dots \right).$$

Beschränken wir uns auf kleine Werte von  $\varrho$ , also auf „Paraxialstrahlen“, so können wir die höheren Glieder der Reihenentwicklung vernachlässigen und erhalten

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\varrho, z) \approx \Phi(z) \\ \frac{d^2 \varrho}{dt^2} \approx +\frac{e}{m} \frac{\varrho}{2} \frac{d^3 \Phi}{dz^3}. \end{array} \right.$$

Außerdem gilt hier  $\frac{d\varrho}{dt} \ll \frac{dz}{dt}$ , also nach (1):

$$(16^*) \quad \frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2e}{m} (E - \Phi(z))}$$

$$\frac{d}{dt} = \sqrt{\frac{2e}{m} (E - \Phi(z))} \frac{d}{dz}.$$

Aus (16<sup>\*</sup>) und (16) folgt dann nach einigen Umformungen:

$$(17) \quad 2\sqrt{E - \Phi(z)} \frac{d}{dz} \left( \sqrt{E - \Phi(z)} \frac{d\varrho}{dz} \right) = \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \Phi}{dz^2},$$

$$(18) \quad \boxed{2(E - \Phi(z)) \frac{d^2 \varrho}{dz^2} - \frac{d\Phi}{dz} \frac{d\varrho}{dz} - \frac{1}{2} \varrho(z) \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = 0.}$$

(18) kann bei vorgegebener axialer Potentialverteilung aufgefaßt werden als Differentialgleichung für  $\varrho = \varrho(z)$  zur Bestimmung der Bahn der paraxialen Elektronenstrahlen. Und umgekehrt kann (18) als Differentialgleichung für  $\Phi(z)$  angesehen werden, die es gestattet, die Potentialverteilung zu berechnen, die notwendig ist, damit ein bestimmter durch  $\varrho = \varrho(z)$  gegebener Verlauf der paraxialen Elektronenstrahlen verwirklicht wird.

#### § 4. Anwendung von (18) auf eine spezielle einfache Potentialverteilung

Als Beispiel der ersten Fragestellung behandeln wir den speziellen Fall, daß

$$\Phi(z) = A + Bz$$

ist. Dann wird, da

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} = 0,$$

$$(19) \quad \varrho(\varrho, z) = A + Bz$$

unabhängig von  $\varrho$ , d. h. wir haben eine Potentialverteilung, wie sie etwa zwischen zwei hinreichend großen Kondensatorplatten besteht.

Setzen wir diese Werte in (18) ein, so ergibt sich nach Lösen der Differentialgleichung, wenn noch die Anfangsbedingungen an der Stelle  $z = z_0$  durch

$$\left. (\varrho) = \varrho_0; \quad \left( \frac{d\varrho}{dz} \right) \right|_{z=z_0} = \operatorname{tg} \alpha_0$$

gegeben sind:

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{d\varrho}{dz} = \frac{\sqrt{E - A - Bz_0}}{\sqrt{E - A - Bz}} \operatorname{tg} \alpha_0 \\ \varrho = \varrho_0 + \frac{2(E - A - Bz_0)}{B} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{E - A - Bz}}{\sqrt{E - A - Bz_0}} \right\} \operatorname{tg} \alpha_0, \end{cases}$$

gültig für Paraxialstrahlen.

Für den behandelten Spezialfall lassen sich die Gl. (1) und (2) auch ohne die — für die Paraxialstrahlen berechtigten — Vernachlässigungen streng lösen. Es ergibt sich dann:

$$(20^*) \quad \begin{cases} \frac{d\varrho}{dz} = \frac{\sqrt{E - A - Bz_0}}{\sqrt{E - A - Bz - B(z - z_0) \operatorname{tg}^2 \alpha_0}} \operatorname{tg} \alpha_0 \\ \text{und} \\ \varrho = \varrho_0 + \frac{2(E - A - Bz_0)}{B} \cos^2 \alpha_0 \\ \quad \cdot \left\{ 1 - \frac{\sqrt{E - A - Bz - B(z - z_0) \operatorname{tg}^2 \alpha_0}}{\sqrt{E - A - Bz_0}} \right\} \operatorname{tg} \alpha_0. \end{cases}$$

Für Werte von  $\alpha_0$ , für die  $\cos^2 \alpha_0 = 1$ ;  $\operatorname{tg}^2 \alpha_0 = 0$  gesetzt werden kann, besteht also Übereinstimmung zwischen (20\*) und den oben gegebenen Formeln (20). Der Unterschied zwischen den Formeln (20) und (20\*) ist durch die „sphärische Aberration“ des „geschichteten Mediums“ bedingt. Wir können das geschichtete Medium, d. h. die durch (19) gegebene Potentialverteilung als elektronenoptisches Analogon eines Satzes von hintereinander gestellten Glasplatten (der Lichtoptik) auffassen, deren Brechungsindizes von Glasplatte zu Glasplatte (etwas) verschieden sind. Erstreckt sich z. B. die Potentialverteilung (19) von  $z = 0$  bis  $z = 1$ , während vorher und nachher das Potential konstant ist<sup>1)</sup>, und gehen die Elektronenzahlen von einem Punkte  $z < 0$ ,  $\varrho = 0$  aus, so errechnet man aus den Formeln (20\*) leicht, daß sie nach Durchlaufen des Potentialgefälles herzukommen scheinen von einem Punkte

$$\begin{aligned} z' = 1 - \frac{z}{\cos \alpha_0} \sqrt{\cos^2 \alpha_0 - \frac{B}{E - A}} \\ + \frac{2 \cos \alpha_0}{B} \sqrt{E - A} \sqrt{(E - A) \cos^2 \alpha_0 - B} \\ - \frac{2}{B} [(E - A) \cos^2 \alpha_0 - B], \end{aligned}$$

1) Eine solche Potentialverteilung läßt sich ja leicht experimentell verwirklichen.

wofür wir mit der Bezeichnung  $(E - A) \cos^2 \alpha_0 = D_a$  auch schreiben können:

$$z' = 1 - z \sqrt{1 - \frac{B}{D_a}} + \frac{2}{B} [\sqrt{D_a} - \sqrt{D_a - B}] \sqrt{D_a - B}.$$

Für die Paraxialstrahlen erhalten wir dagegen unter Benutzung der Formeln (20) für den scheinbaren Ausgangspunkt  $z'$  mit  $E - A = D$ :

$$z' = 1 - z \sqrt{1 - \frac{B}{D}} + \frac{2}{B} [\sqrt{D} - \sqrt{D - B}] \sqrt{D - B}.$$

Der Unterschied zwischen den beiden Formeln für  $z'$  gibt die „sphärische Längsaberration“ dieses speziellen Falles.

Ist  $\operatorname{tg} \alpha_0 = 0$ , trifft also der Elektronenstrahl  $\perp$  auf das „geschichtete Medium“, so bleibt  $\varrho = \varrho_0$ , d. h. der Elektronenstrahl geht ungebrochen durch das „Medium“ hindurch.

### § 5. Umformung der Differentialgleichung (18)

Gl. (18) läßt sich übrigens noch wesentlich vereinfachen. Wir schreiben diese Gleichung zunächst folgendermaßen:

$$(18^*) \frac{d^3 \varrho}{dz^3} - \frac{1}{2(E - \Phi(z))} \frac{d\varrho}{dz} \frac{d\Phi}{dz} - \frac{1}{4(E - \Phi(z))} \varrho(z) \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = 0.$$

Führen wir jetzt eine neue Variable  $P$  ein durch

$$(21) \quad \varrho = e^{\frac{1}{2} \int \frac{1}{2(E - \Phi(z))} \frac{d\Phi}{dz} dz} \cdot P,$$

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}} \cdot P,$$

so gilt für  $P = P(z)$  die Differentialgleichung

$$(22) \quad \boxed{\frac{d^3 P}{dz^3} + h(z) \cdot P(z) = 0},$$

wo

$$(23) \quad h(z) = \frac{3}{16(E - \Phi(z))^2} \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 = \frac{3}{16} \left( - \frac{d}{dz} \log F(z) \right)^2$$

ist. Hier ist

$$(24) \quad F(z) = E - \Phi(z).$$

Aus (23) folgt übrigens, daß  $h(z)$  im ganzen Bereich von  $z$  stets  $\geq 0$  sein muß.

## § 6. Die zugehörige Riccati'sche Differentialgleichung

Ist jetzt  $\Phi(z)$  (und  $E = \text{const}$ ), also auch  $F(z)$  und demnach nach (23)  $h(z)$  gegeben, so läßt sich nach (22)  $P = P(z)$  und nach (21)  $\varrho = \varrho(z)$  berechnen. Die Gl. (22) läßt sich nun noch umformen. Wir können dafür schreiben:

$$\frac{P''}{P} = \frac{P''}{P'} \cdot \frac{P'}{P} = (\log P') \cdot (\log P)' = -h.$$

Wir denken uns  $-h = -h(z)$  in zwei Faktoren

$$k^*(z) \cdot k(z) = -h(z)$$

zerfällt derart, daß

$$\log P' = \int k^*(z) dz,$$

$$\log P = \int k(z) dz.$$

Dann wird

$$(25^*) \quad P' = e^{\int k^*(z) dz}; \quad P = e^{\int k(z) dz}$$

und demnach

$$P' = k(z) e^{\int k(z) dz} = e^{\int k^*(z) dz},$$

also

$$\log k(z) + \int k(z) dz = \int k^*(z) dz$$

und durch Differenzieren

$$\frac{k'(z)}{k(z)} + k(z) = k^*(z) = -\frac{h(z)}{k(z)},$$

$$(25) \quad k'(z) + k^2(z) + h(z) = 0.$$

Dies aber ist die Riccati'sche Differentialgleichung. Bestimmt man aus ihr die Funktion  $k = k(z)$ , so ergibt sich  $P = P(z)$  aus der zweiten der Gleichungen (25\*) und  $\varrho = \varrho(z)$  aus (21).

Die Gl. (25) ist nur unter gewissen stark einschränkenden Bedingungen in geschlossener Form lösbar.<sup>1)</sup> Ist ein partikuläres Integral  $k_1(z)$  von (25) bekannt, so ergibt sich das vollständige Integral aus

$$k(z) = k_1(z) + \frac{1}{v(z)},$$

1) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, S. 23; E. Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, S. 70.

wo für  $v = v(z)$  die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dz} - 2k_1(z) \cdot v(z) = 1$$

gilt, also

$$v(z) = C \cdot e^{+2 \int k_1(z) dz} + e^{2 \int k_1(z) dz} \cdot \int e^{-2 \int k_1(z) dz} dz.$$

### § 7. Integration der Differentialgleichung (22) durch Reihenentwicklung

Im allgemeinen Fall lässt sich (22) in Reihendarstellung lösen, indem man für  $P = P(z)$  den Ansatz  $P(z) = \sum_0^{\infty} a_i z^i$ , also  $\frac{d^2 P}{dz^2} = \sum_0^{\infty} i(i-1) a_i z^{i-2} = \sum_0^{\infty} (i+1)(i+2) a_{i+2} z^i$  macht und ebenso  $h(z)$  nach Potenzen von  $z$  entwickelt, also  $h(z) = \sum_0^{\infty} b_i z^i$ . Man erhält dann für die Koeffizienten  $a_i$  der unbekannten Funktion  $P = P(z)$  die Rekursionsformel

$$(26) \quad a_{i+2} = -\frac{1}{(i+1)(i+2)} \{a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + a_{i-2} b_2 + \dots + a_0 b_i\},$$

wo also  $a_0$  und  $a_1$  — entsprechend den zwei bei der Integration von (22) auftretenden Konstanten — beliebig wählbar sind und den Anfangsbedingungen angepasst werden können. Speziell liefert (26) also:

$$(26a) \quad \begin{cases} a_0, a_1 \text{ beliebig} \\ a_2 = -\frac{1}{2} a_0 b_0 \\ a_3 = -\frac{1}{6} (a_1 b_0 + a_0 b_1) \\ a_4 = -\frac{1}{12} (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) = \frac{1}{24} a_0 b_0^2 - \frac{1}{12} (a_1 b_1 + a_0 b_2). \end{cases}$$

Ist speziell  $b_0 = 0$ , so sind wieder  $a_0$  und  $a_1$  beliebig, während sich aus den Formeln (26) und (26a)  $a_2 = 0$  ergibt. Im übrigen bleiben die Formeln (26), (26a) unverändert.

Für große Werte von  $z$  — bzw. in größerer Entfernung von den Hauptpunkten (vgl. § 13) — wird es vorteilhaft sein, die Funktionen  $h(z)$  und  $P(z)$  nicht nach steigenden, sondern nach fallenden Potenzen von  $z$  [bzw. von  $(z - z_H) = \zeta$ ] zu entwickeln. Machen wir also den Ansatz  $P = \sum_0^{\infty} a_{-i} z^{-i}$ ;

$h = \sum_0^{\infty} b_{-i} z^{-i}$ , so wird  $P' = \sum_0^{\infty} i(i+1) a_{-i} z^{-(i+2)}$ . Durch 0-Setzen der Koeffizienten von  $z^{-i}$  in  $P'' + hP = 0$  erhalten wir dann wieder eine Rekursionsformel für die  $a_{-i}$ . Dabei haben wir aber einige Sonderfälle zu beachten. Ist  $b_0 \neq 0$ , so liefert unser Ansatz nur die triviale Lösung  $a_{-i} = 0$ , also  $P \equiv 0$ . Das Gleiche gilt für  $b_0 = 0$ ;  $b_{-1} \neq 0$  sowie für  $b_0 = b_{-1} = 0$ ;  $b_{-2} \neq 0$  und  $\neq -2$ . Ist  $b_0 = b_{-1} = 0$ ;  $b_{-2} = -2$ , so ergibt sich das partikuläre Integral

$$(27) \quad \begin{cases} a_0 = 0; a_{-1} \text{ beliebig} \\ a_{-i} = -\frac{1}{i(i+1)-2} \sum_{j=1}^{i-1} a_{-j} b_{-(i+2)+j} \\ (i = 2, 3, 4, \dots). \end{cases}$$

Ist  $b_0 = b_{-1} = b_{-2} = 0$ ;  $b_{-3} \neq 0$ , so wird  $a_0$  beliebig.

$$(27a) \quad \begin{cases} a_{-i} = -\frac{1}{i(i+1)} \sum_{j=0}^{i-1} a_{-j} b_{-(i+2)+j} \\ (i = 1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

Ist  $b_0 = b_{-1} = b_{-2} = \dots = b_{-k} = 0$ ;  $b_{-(k+1)} \neq 0$ , so ist  $a_0$  beliebig,  $a_{-1} = a_{-2} = \dots = a_{-(k-2)} = 0$ , und es gelten weiter die Formeln

$$(27b) \quad \begin{cases} a_{-i} = -\frac{1}{i(i+1)} a_0 b_{-(i+2)} \\ (i = k-1, k, \dots, 2k-3) \\ a_{-i} = -\frac{1}{i(i+1)} \left[ a_0 b_{-(i+2)} + \sum_{j=k-1}^{i+1-k} a_{-j} b_{-(i+2)+j} \right] \\ (i = 2k-2, 2k-1, \dots). \end{cases}$$

[Das vollständige Integral könnten wir dann z. B. nach § 6 berechnen, wo wir  $k_1(z) = \frac{d}{dz} (\log P(z))$  zu setzen haben.]

Die Formeln (26) bzw. (27) gelten also für den Fall, daß  $\varphi = \varphi(\varrho, z)$  bzw.  $\Phi = \Phi(z)$  bekannt ist und  $\varrho = \varrho(z)$  gesucht wird. Aus (23) berechnet man dann  $h = h(z) = \sum_0^{+\infty} b_i z^i$ , aus

(26) bzw. (27)  $P = P(z) = \sum_0^{+\infty} a_i z^i$  und hieraus nach (21) die gesuchte Funktion  $\varrho = \varrho(z)$ .

Nehmen wir die Hilfsfunktion  $P = P(z)$  als bekannt an, so läßt sich aus (22)

$$(28) \quad h(z) = -\frac{1}{P(z)} \cdot \frac{d^2 P}{dz^2},$$

fernern aus (23) und (24)

$$(29) \quad \Phi(z) = E - \text{const} \cdot e^{-\frac{4}{3}\sqrt{3}\int V^{h(z)} dz}$$

und aus (21)

$$(30) \quad \varrho(z) = P(z) \cdot e^{\frac{1}{3}\sqrt{3}\int V^{h(z)} dz}$$

berechnen.

Die Hilfsfunktion  $P = P(z)$  als bekannt anzunehmen, mutet zwar zunächst recht willkürlich und unberechtigt an, besitzt aber doch insofern eine gewisse Berechtigung, als ja an den Stellen, an denen  $P(z) = 0$  ist, auch  $\varrho(z) = 0$  ist.

Handelt es sich also allein um Abbildung eines Achsenpunktes und kommt es auf den Verlauf der Elektronenstrahlen zwischen Objekt- und Bildpunkt nicht an, so genügt es, eine geeignete Funktion  $P = P(z)$  so zu wählen, daß sie an der Stelle des Objekt und Bildpunktes verschwindet.

Doch auch noch in anderer Hinsicht besteht eine gewisse Berechtigung, von  $P(z)$  als bekannter Funktion auszugehen. Ist es doch hierdurch in *einfachster* Weise möglich, eine große Zahl von *zusammengehörigen* Funktionspaaren  $\varrho = \varrho(z)$ ;  $\Phi = \Phi(z)$  zu berechnen.

Ist  $\varrho = \varrho(z)$  gegeben und  $\Phi = \Phi(z)$  gesucht, so läßt sich (22) nicht anwenden, da ja in die zwischen  $\varrho(z)$  und  $P(z)$  bestehende Beziehung (21) noch  $\Phi(z)$  eingeht.

### § 8. Integration der Differentialgleichung (18) durch Reihenentwicklung

Wir müssen dann auf (20) zurückgehen, das wir jetzt unter Einführung von  $F(z)$  nach (24) schreiben können

$$(31) \quad 4F \cdot \varrho'' + 2F' \cdot \varrho' + \varrho \cdot F''' = 0.$$

Entwickeln wir hier die als bekannt vorausgesetzte Funktion  $\varrho = \varrho(z)$  nach Potenzen von  $z$ , so daß

$$\varrho(z) = \sum_0^{\infty} b_i z^i$$

ist und machen für  $F = F(z)$  den Ansatz

$$F(z) = \sum_0^{\infty} a_i z^i,$$

so lassen sich die Koeffizienten  $a_i$  aus den  $b_i$  berechnen. Wir erhalten für  $b_0 \neq 0$  die Rekursionsformel

$$a_{i+2} = -\frac{b_1}{b_0} a_{i+1} - \frac{1}{(i+1)(i+2)b_0} \cdot \sum_{j=0}^i [(i-j)(i+3+j) + 4(j+1)(j+2)] \cdot a_{i-j} b_{2+j},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(32) \quad \begin{cases} a_0, a_1 \text{ beliebig} \\ a_i = -\frac{1}{i(i-1)b_0} \sum_{j=0}^{i-1} [i(i-1) + 3j(j+1)] a_{i-1-j} b_{j+1} \\ (i = 2, 3, 4, \dots) \end{cases}$$

Ist  $b_0 = 0$ ;  $b_1 \neq 0$ , so ergibt sich aus unserem Ansatz bzw. aus (32):

$$(32a) \quad \begin{cases} a_0 \text{ beliebig} \\ a_{i-1} = -\frac{1}{i(i-1)b_1} \sum_{j=1}^{i-1} [i(i-1) + 3j(j+1)] a_{i-1-j} b_{j+1} \\ (i = 2, 3, 4, \dots) \\ \text{oder} \\ a_i = -\frac{1}{i(i+1)b_1} \sum_{j=0}^{i-1} [i(i+1) + 3(j+1)(j+2)] a_{i-j-1} b_{j+2} \\ (i = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

Ist  $b_0 = b_1 = 0$ , so liefert unser Ansatz nur die triviale Lösung  $a_i = 0$ , d. h.  $F \equiv 0$ .

Wie in § 7 kann es auch für die Lösung von (31) zweckmäßig oder notwendig sein, die gegebene Funktion  $\varrho = \varrho(z)$  nicht nach steigenden, sondern nach fallenden Potenzen von  $z$  zu entwickeln. Machen wir also den Ansatz  $\varrho = \sum_0^{\infty} b_{-i} z^{-i}$ ;

$$F = \sum_0^{\infty} a_{-i} z^{-i}, \text{ so finden wir als Lösung für } F(z), \text{ falls } b_0 \neq 0 \text{ ist,}$$

$$(33) \quad \begin{cases} a_0 \text{ beliebig} \\ a_{-i} = -\frac{1}{i(i+1)b_0} \sum_{j=0}^{i-1} [4i(i+1) - 6ij + 3j(j-1)] a_{-j} b_{-(i-j)} \\ (i = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

Ist  $b_0 = 0$ , so liefert unser Ansatz wieder nur die triviale Lösung  $a_{-i} = 0$ , d. h.  $F \equiv 0$ .

§ 9. Weitere Umformung der Differentialgleichung (18) für den Fall, aus bekanntem  $\varrho = \varrho(z)$  die Funktion  $\Phi = \Phi(z)$  zu berechnen

Wir können noch einen anderen Weg hier angeben, der evtl. noch einfacher  $F = F(z)$  in Reihendarstellung zu berechnen gestattet, falls  $\varrho = \varrho(z)$  gegeben ist.

Betrachten wir (31), so sehen wir, daß wir dafür auch schreiben können

$$3\varrho'' \cdot F + (\varrho \cdot F)'' = 0$$

oder

$$(34) \quad \frac{3\varrho''}{\varrho} \cdot (\varrho F) + (\varrho F)'' = 0.$$

Setzen wir noch  $\varrho F = G(z)$  und  $\frac{3\varrho''}{\varrho} = g(z)$ , so geht (34) über in

$$(35) \quad \boxed{G''(z) + g(z) \cdot G(z) = 0.}$$

§ 10. Integration von (35) durch Reihenentwicklung

Ist jetzt  $\varrho = \varrho(z)$  bekannt, so kennen wir auch  $\frac{3\varrho''(z)}{\varrho(z)} = g(z)$ , und wir erhalten mit

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(z) = \sum_0^{\infty} b_i z^i \\ G(z) = \sum_0^{\infty} a_i z^i \end{array} \right.$$

wieder wie oben (26)

$$(37) \quad a_{i+2} = \frac{1}{(i+1)(i+2)} \left\{ a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + a_{i-2} b_2 + \dots + a_0 b_i \right\}.$$

Für  $F = F(z)$  ergibt sich dann

$$(38) \quad F(z) = \frac{G(z)}{\varrho(z)} = \frac{1}{\varrho(z)} \sum_0^{\infty} a_i z^i.$$

Es gelten hier genau die gleichen Bemerkungen, die wir oben in § 7 im Anschluß an Gl. (26) gemacht haben, so daß wir diese hier nicht zu wiederholen brauchen.

Das Gleiche gilt auch für die Entwicklung von  $g(z)$  und  $G(z)$  nach fallenden Potenzen von  $z$ . Wir erhalten wieder dieselben Formeln wie in § 7, die wir daher hier nicht zu wiederholen brauchen. Auch die einzelnen Spezialfälle übertragen sich völlig ungeändert.

§ 11. Ausführung der Integration für einige spezielle Fälle

1. Im Anschluß an die vorstehenden Überlegungen seien noch für einige spezielle Fälle die tatsächlichen Lösungen

angegeben. Ist verlangt, eine Potentialverteilung derart zu finden, daß die vom Punkte  $z = 0$  in beliebiger Richtung austretenden paraxialen Elektronenstrahlen sich im Punkte  $z = 1$  wieder treffen, und soll der Weg der Elektronenstrahlen durch die Gleichung  $\varrho(z) = Cz(1-z)$  gegeben sein, wo  $C$  die Neigung der Elektronenstrahlen im Punkte  $z = 0$  angibt, so wird

$$\varrho'(z) = C - 2Cz; \quad \varrho'' = -2C,$$

und (31) lautet jetzt:

$$Cz(1-z)F'' + (2C - 4Cz)F' - 8CF = 0$$

oder nach Division durch  $C$

$$z(1-z)F'' + (2 - 4z)F' - 8F = 0.$$

Das ist die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. Ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung ist die hypergeometrische Reihe  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ , die definiert ist durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z^3 + \dots$$

In unserm Fall wird

$$\alpha = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{23}; \quad \beta = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{23}; \quad \gamma = 2.$$

Die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  sind bei uns konjugiert komplex. In der hypergeometrischen Reihe treten sie nur in Verbindung  $(\alpha+x)(\beta+x)$  auf mit  $x = 0, 1, 2, \dots$  Setzen wir  $\alpha = u + iv$ ;  $\beta = u - iv$ , so wird  $(\alpha+x)(\beta+x) = (u+x)^2 + v^2$ .

2. Ganz entsprechend erhalten wir, wenn die Potentialverteilung durch die spezielle Gleichung

$$\Phi(z) = E - Cz(1-z)$$

gegeben ist, wenn also

$$F(z) = Cz(1-z)$$

ist, für den Weg  $\varrho = \varrho(z)$  der Elektronenstrahlen nach (31) die Differentialgleichung

$$4Cz(1-z)\varrho'' + 2C(1-2z)\varrho' - 2C\varrho = 0$$

oder nach Division durch  $4C$

$$z(1-z)\varrho'' + \left(\frac{1}{2} - z\right)\varrho' - \frac{1}{2}\varrho = 0.$$

Diese Gleichung hat wieder die Form der hypergeometrischen Differentialgleichung und liefert sofort in der Umgebung von  $z = 0$

$$\varrho(z) = C_1 \cdot F\left(\frac{i}{2}\sqrt{2}; -\frac{i}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}; z\right) + C_2 \cdot \sqrt{z} \cdot F\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}; \frac{3}{2}; z\right),$$

wo  $C_1$  und  $C_2$  Konstanten sind, die den Anfangsbedingungen angepaßt werden können.

3. Ist, um ein anderes Beispiel zu wählen,

$$F(z) = \text{const } \sqrt[n+1]{e^{-4A z^{n+1}}},$$

so benutzen wir, um den Weg  $\varrho = \varrho(z)$  der Elektronenstrahlen zu finden, Gl. (22) und bilden zu diesem Zwecke nach (23) wegen

$$\log F(z) = -\frac{4}{n+1} A z^{n+1} + \text{const},$$

$$h(z) = \frac{3}{16} \cdot 16 A^2 z^{2n} = 3 A^2 z^{2n}.$$

Dies in (22) eingesetzt, ergibt

$$\frac{d^2 P}{dz^2} + 3 A^2 z^{2n} P(z) = 0.$$

Dies gibt (vgl. Jahnke-Emde, S. 167) das partikuläre Integral<sup>1)</sup>

$$P(z) = \sqrt{z} J_{\frac{1}{2(n+1)}} \left( \frac{A \sqrt{3}}{n+1} z^{n+1} \right)$$

und nach (21)

$$\varrho(z) = \text{const} \sqrt{z} \sqrt[n+1]{e^{4A z^{n+1}}} J_{\frac{1}{2(n+1)}} \left( \frac{A \sqrt{3}}{n+1} z^{n+1} \right),$$

wo  $J_{\frac{1}{2(n+1)}}$  die Besselsche Funktion erster Art der Ordnung  $\frac{1}{2(n+1)}$  ist. Für  $n = 0$  geht dies über in:

$$(39) \quad \begin{cases} \varrho(z) = \text{const} e^{4z} \sqrt{z} J_{\frac{1}{2}}(A z \sqrt{3}) = \text{const}_1 \cdot e^{4z} \sin(A z \sqrt{3}) \\ \Phi(z) = E - \text{const} \cdot e^{-4A z}. \end{cases}$$

1) Das vollständige Integral ist

$$P(z) = \sqrt{z} \{ C_1 \cdot J_\mu(\zeta) + C_2 \cdot N_\mu(\zeta) \} \quad \text{mit } \zeta = \frac{A \sqrt{3}}{n+1} z^{n+1} \quad \text{und } \mu = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Es ist noch

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} = - \text{const} \cdot 16 A^2 e^{-4A z}$$

$$\frac{d^4 \Phi}{dz^4} = - \text{const} \cdot 256 A^4 e^{-4A z},$$

so daß nach (9)

$$(39^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\varrho, z) = E - \text{const} \\ \cdot e^{-4A z} \left\{ 1 - 4A^2 \varrho^2 + 8A^4 \varrho^4 - \frac{16}{9} A^6 \varrho^6 + \dots \right\} \end{array} \right.$$

(39) und (39<sup>\*</sup>) geben den Verlauf von  $\Phi(z) = \varphi(0, z)$ ;  $\varphi(\varrho, z)$  und  $\varrho = \varrho(z)$ . (39) zeigt, daß die Elektronenstrahlen hier dauernd wieder die Achse schneiden. Es wird  $\varrho = 0$  für  $z = \frac{m}{A\sqrt{3}}\pi$ , wo  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Wir erhalten also einen „Knotenstrahl“, dessen „Bäuche“ mit wachsendem  $z$  bei  $A > 0$  zunehmen, bei  $A < 0$  dagegen abnehmen.

4. Eine andere interessante Lösung ergibt sich für den Fall, daß wir ausgehen von

$$P = a z (z - z^*) \quad \text{mit } a = \text{const} \\ z^* = \text{const.}$$

Aus (22) erhalten wir dann

$$2a + h(z) a z (z - z^*) = 0.$$

Dies liefert

$$h(z) = \frac{3}{16} \left( -\frac{d}{dz} \log F(z) \right)^2 = \frac{2}{z(z^* - z)} \\ \frac{d}{dz} \log F(z) = -4\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{z(z^* - z)}} \\ \log F(z) = -4\sqrt{\frac{2}{3}} \arcsin \frac{2z - z^*}{z^*} + \text{const} \\ F(z) = \text{const} \cdot e^{-4\sqrt{\frac{2}{3}} \arcsin \frac{2z - z^*}{z^*}},$$

also

$$\Phi(z) = E - \text{const} \cdot e^{-4\sqrt{\frac{2}{3}} \arcsin \frac{2z - z^*}{z^*}}$$

und

$$\varrho(z) = C \cdot z(z - z^*) e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \arcsin \frac{2z - z^*}{z^*}},$$

wo  $C$  eine Konstante ist, die sich aus der Anfangsrichtung  $\operatorname{tg} \alpha_0$  des Elektronenstrahles an der Stelle  $z = 0$ ,  $\varrho = 0$  zu

$$C = - \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{z^*} e^{\pi} V^{\frac{3}{2}}$$

bestimmt. Da

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} = \frac{2 \cdot \operatorname{const}}{3z(z^* - z)} \left( 16 - \frac{(z^* - 2z) \sqrt{6}}{\sqrt{z(z^* - z)}} \right) e^{-4\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arc} \sin \frac{2z - z^*}{z^*}}, \quad (40)$$

so wird

$$\varphi(\varrho, z) \approx E - \operatorname{const}$$

$$e^{-4\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arc} \sin \frac{2z - z^*}{z^*}} \left[ 1 - \frac{\varrho^2}{6z(z^* - z)} \left( 16 + \frac{(2z - z^*) \sqrt{6}}{\sqrt{z(z^* - z)}} \right) \right].$$

Es lassen sich so in einfacher Weise noch eine Reihe von weiteren speziellen Fällen behandeln, doch wollen wir davon absehen, da ja oben bereits allgemein die Lösung der Differentialgleichungen in Reihendarstellung gegeben wurde.

### § 12. Die partiellen Differentialgleichungen der Elektronenoptik

Die oben aufgestellte Differentialgleichung (18) und die aus ihr durch Umformung hervorgegangenen gelten nur für die paraxialen Elektronenstrahlen. Für Elektronenstrahlen, die weiter von der Achse entfernt sind, gelten dagegen partielle Differentialgleichungen, die wir jetzt angeben wollen.

Da für die Elektronenstrahlen die gleichen Gesetze wie für die Lichtstrahlen gelten, so gilt auch hier das Fermat'sche Prinzip

$$\delta \int_{Q_1}^{Q_2} n ds = 0, \quad (42)$$

wo  $ds$  das Linienelement der Elektronenstrahlen und

$$n \sim \sqrt{E - \varphi(\varrho, z)}$$

der variable Brechungsindex ist. Nach den Lehrsätzen der Variationsrechnung verschwindet nun die erste Variation des

„Wegintegrals“  $\int_{Q_1}^{Q_2} n ds$  dann und nur dann, wenn für  $n$  längs des „Elektronenstrahlweges“ zwischen  $Q_1$  und  $Q_2$  die Euler'schen Differentialgleichungen gelten. Da bei uns  $n$  nur vom

Ort, nicht von der Richtung abhängt, so lauten hier die Euler-schen Differentialgleichungen:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} n \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dn}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x} \\ n \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dn}{ds} = \frac{\partial n}{\partial y} \\ n \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dn}{ds} = \frac{\partial n}{\partial z}, \end{array} \right. \quad \text{wo} \quad \frac{dn}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial n}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial n}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

Nun ist  $n \sim \sqrt{E - \varphi(\varrho, z)}$ . Setzen wir dies in (40) ein, so erhalten wir

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2(E - \varphi(\varrho, z)) \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ 2(E - \varphi(\varrho, z)) \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ 2(E - \varphi(\varrho, z)) \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Aus diesen Gleichungen sind bei gegebener Potentialverteilung  $\varphi(\varrho, z)$  die Werte  $z = z(s)$ ,  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  als Funktion des Parameters  $s$  zu berechnen. Die drei Gl. (41) sind übrigens nicht unabhängig voneinander. Multiplizieren wir sie der Reihe nach mit  $d x/d s$ ,  $d y/d s$ ,  $d z/d s$  und addieren sie, so erhalten wir eine Identität.

Für Strahlen, die von einem Achsenpunkt ausgegangen sind, können wir die beiden ersten Gl. (41) in eine einzige zusammenziehen. Wir erhalten dann:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2(E - \varphi(\varrho, z)) \frac{d^2 \varrho}{ds^2} - \frac{d\varrho}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = 0, \\ 2(E - \varphi(\varrho, z)) \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Für Paraxialstrahlen geht dies über in (18), da ja hier

$$ds \approx dz; \quad \varphi(\varrho, z) \approx \Phi(z); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \approx -\frac{1}{4} \varrho \frac{d^2 \Phi}{dz^2}$$

ist.

### § 13. Einige elektronenoptische Folgerungen aus (17)

Wenden wir die für Paraxialstrahlen geltende Gl. (17) auf zwei verschiedene Elektronenstrahlen an, deren Bahngleichungen durch  $\varrho_1 = \varrho_1(z)$  bzw.  $\varrho_2 = \varrho_2(z)$  bezeichnet seien, so erhalten wir

$$2\sqrt{E - \Phi(z)} \frac{d}{dz} \left( \sqrt{E - \Phi(z)} \frac{d\varrho_1}{dz} \right) = \frac{1}{2} \varrho_1 \frac{d^2 \Phi}{dz^2},$$

$$2\sqrt{E - \Phi(z)} \frac{d}{dz} \left( \sqrt{E - \Phi(z)} \frac{d\varrho_2}{dz} \right) = \frac{1}{2} \varrho_2 \frac{d^2 \Phi}{dz^2}.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit  $\varrho_2$ , die zweite mit  $\varrho_1$ , subtrahieren beide Gleichungen und fügen

$$\pm \sqrt{E - \Phi(z)} \frac{d\varrho_1}{dz} \frac{d\varrho_2}{dz}$$

hinzu, so ergibt sich

$$\frac{d}{dz} \left( \varrho_2 \sqrt{E - \Phi(z)} \frac{d\varrho_1}{dz} - \varrho_1 \sqrt{E - \Phi(z)} \frac{d\varrho_2}{dz} \right) = 0,$$

also

$$(43) \quad \boxed{\varrho_2(z) \frac{d\varrho_1}{dz} - \varrho_1(z) \frac{d\varrho_2}{dz} = \frac{C_{12}}{\sqrt{E - \Phi(z)}}},$$

wo  $C_{12}$  eine (von den beiden Strahlen abhängende) Konstante ist. Diese Gleichung sagt aus, daß für zwei Elektronenstrahlen  $\varrho_1 = \varrho_1(z)$  und  $\varrho_2 = \varrho_2(z)$  die Differenz  $\varrho_2 \frac{d\varrho_1}{dz} - \varrho_1 \frac{d\varrho_2}{dz}$ , betrachtet als Funktion von  $z$ , überall längs des ganzen Verlaufes proportional  $\frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}}$  ist.

Es sei  $\Phi_0$  der Wert des Potentials im „Objektraum“. Betrachten wir hier einen parallel zur Achse einfallenden Strahl  $\varrho_1 = a$ ;  $\frac{d\varrho_1}{dz} = 0$  und einen durch den Punkt  $z_0$  in Richtung  $\frac{d\varrho_2}{dz} = \operatorname{tg} u_2 = -b$  gehenden Strahl  $\varrho_2 = b(z_0 - z)$ , so ergibt sich aus (43) für diese beiden Strahlen die Proportionalitätskonstante

$$C_{12} = ab \sqrt{E - \Phi_0},$$

so daß für diese beiden Strahlen allgemein die Gleichung gilt:

$$(44) \quad \varrho_2 \frac{d\varrho_1}{dz} - \varrho_1 \frac{d\varrho_2}{dz} = ab \frac{\sqrt{E - \Phi_0}}{\sqrt{E - \Phi(z)}}.$$

Ist  $z_0$  der vordere Brennpunkt (Fig. 1), so verläuft  $\varrho_2$  im Bildraum parallel zur Achse, also ist dort

$$\varrho_2 = -k; \quad \frac{d\varrho_2}{dz} = 0.$$

Ferner geht  $\varrho_1$  im Bildraum — wo wir den Wert des Potentials mit  $\Phi_1$  bezeichnen wollen — durch den hinteren Brennpunkt, den wir  $z_1$  nennen, etwa in Richtung  $\frac{d\varrho_1}{dz} = \operatorname{tg} u_1' = -h$ .

Es ist also  $\rho_1 = h(z_1 - z)$ . Nennen wir noch die vordere Brennweite, d. h. den Abstand des vorderen Brennpunktes vom vorderen Hauptpunkte,  $f$ , den Abstand des hinteren Brennpunktes vom hinteren Hauptpunkte  $f'$ , so ist

$$(45) \quad f' = \frac{a}{h}; \quad f = -\frac{k}{b}.$$

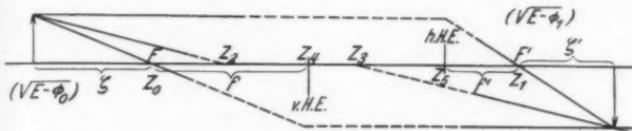


Fig. 1. Fundamentalstrahlen, Hauptebenen und Knotenpunkte

Dann folgt aus (44)  $k h = a b \frac{\sqrt{E - \Phi_0}}{\sqrt{E - \Phi_1}}$ , also

$$(46) \quad f = -f' \frac{\sqrt{E - \Phi_0}}{\sqrt{E - \Phi_1}}.$$

Da der Brechungsindex  $\sim \sqrt{E - \Phi(z)}$  ist, so besagt dies, daß

$$(46^*) \quad n f = -n' f'$$

ist, wo  $n$  der Brechungsindex im Objektraum,  $n'$  derjenige im Bildraum ist.

Wir betrachten jetzt ein kleines achsensenkrechtes Objekt, dessen Abstand vom vorderen Brennpunkt gleich  $\zeta$  sei. Von einem seiner Punkte mögen die beiden oben benutzten Strahlen  $\rho_1 = a$  und  $\rho_2 = b(z_0 - z)$  ausgehen, wo  $z_0$  also wieder der vordere Brennpunkt sei. Dann ist  $\zeta = \frac{a}{\operatorname{tg} u_1} = -\frac{a}{b}$ . Das Bild habe vom hinteren Brennpunkt den Abstand  $\zeta'$ . Die Gleichungen der beiden Strahlen lauten im Bildraum wieder wie oben:

$$\rho_2 = -k; \quad \rho_1 = h(z_1 - z),$$

wo  $z_1$  der hintere Brennpunkt ist. Dann ist  $\zeta' = -\frac{k}{\operatorname{tg} u_1'} = \frac{k}{h}$ , und es folgt wegen (45)

$$(47) \quad \zeta \zeta' = f f'.$$

Aus dieser Gleichung und (46) leitet man auch leicht die bekannte Abbildungsgleichung

$$(48) \quad \frac{n'}{g'} - \frac{n}{g} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

ab, wo  $g = f + \zeta$  die „Objektweite“;  $g' = f' + \zeta'$  die Bildweite ist.

Wir betrachten jetzt noch einen dritten Strahl  $\varrho_3 = \varrho_3(z)$ , dessen Richtung im Objekt- und Bildraum die gleiche ist, der also im Objektraum zum vorderen Knotenpunkt  $z_2$  hinzieht und im Bildraum vom hinteren Knotenpunkt  $z_3$  herzukommen scheint. Für  $\varrho_3$  gilt also im Objektraum:

$$\varrho_3 = B(z_2 - z); \quad \frac{d\varrho_3}{dz} = -B$$

im Bildraum:

$$\varrho_3 = B(z_3 - z); \quad \frac{d\varrho_3}{dz} = -B.$$

Für das Strahlenpaar  $\varrho_1, \varrho_3$  erhalten wir demnach aus (43), angewandt auf den Objektraum

$$C_{13} = a B \sqrt{E - \Phi_0},$$

und angewandt auf den Bildraum wegen  $\frac{a}{h} = f'$

$$(49) \quad z_1 - z_3 = f' \frac{\sqrt{E - \Phi_0}}{\sqrt{E - \Phi_1}} = -f.$$

(49) sagt aus, daß der hintere Knotenpunkt vom hinteren Brennpunkt um die vordere Brennweite entfernt ist.

Ebenso liefert die Anwendung der Formel (43) auf die Strahlen  $\varrho_2$  und  $\varrho_3$  im Objekt- und Bildraum

$$(49^*) \quad z_2 - z_0 = -f \frac{\sqrt{E - \Phi_1}}{\sqrt{E - \Phi_0}} = f',$$

d. h. der vordere Knotenpunkt ist vom vorderen Brennpunkt um die hintere Brennweite entfernt.

Für die Abbildung ist wesentlich, daß alle von einem Punkte ausgehenden Strahlen sich wieder in einem Punkte treffen. Die Differentialgleichung der Elektronenstrahlen besitzt zwei unabhängige Lösungen ( $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ ). Jeder andere Strahl  $\varrho_3$  läßt sich durch diese darstellen in der Form

$$\varrho_3 = c_1 \varrho_1 + c_2 \varrho_2.$$

Gehen  $\varrho_2$  und  $\varrho_3$  von einem außeraxialen Punkt und  $\varrho_1$  vom zugehörigen Achsenpunkt  $z$  eines achsensenkrechten Flächen-elementes aus, so ist hier  $\varrho_1 = 0$ ,  $\varrho_3 = \varrho_2$ , also  $c_2 = 1$ ,  $c_1$  beliebig. An der Stelle  $z'$ , dem Bildpunkt von  $z$ , ist wieder  $\varrho_1 = 0$ , also auch hier  $\varrho_3 = \varrho_2$  für beliebiges  $c_1$ . Alle Strahlen  $\varrho_3$  (der  $\varrho, z$ -Ebene), die vom gleichen Punkt auf  $\varrho_2$  im Objektraum ausgehen, schneiden also im Bildraum  $\varrho_2$  im gleichen Punkte.

## § 14. Zwei Fundamentalstrahlen

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen sind — wie vorauszusehen — völlig identisch mit den entsprechenden der geometrischen Lichtoptik. Wie dort, können wir auch jetzt die „elektrische“ Linse schematisch ersetzt denken durch ihre Hauptebenen und ihre Brennpunkte.

Die  $z$ -Achse schneide die vordere Hauptebene in  $z_4$ , die hintere Hauptebene in  $z_5$ . Ferner sei  $z_0$  wieder der vordere,  $z_1$  der hintere Brennpunkt.

Einen im Objektraum parallel zur Achse verlaufenden Strahl  $\rho_1 = \rho_1(z)$  können wir dann schematisch bis zum Schnitt mit der hinteren Hauptebene verlängert denken und ihn dort so geknickt denken, daß er im Bildraum durch den (hinteren) Brennpunkt geht. Die Neigung des betreffenden Strahles sei im Bildraum durch  $\operatorname{tg} u_1'$  gegeben, während sein Achsenabstand

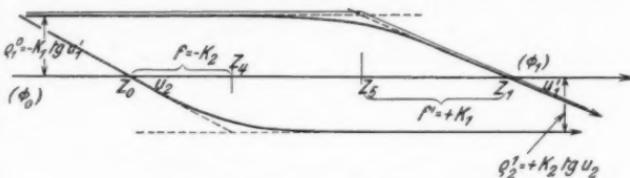


Fig. 2. Fundamentalstrahlen ( $K_1 > 0; K_2 > 0$ )

im Objektraum —  $K_1 \operatorname{tg} u_1'$  sei (Fig. 2). Der Übergang von der Achsenparallelität im Objektraum zur Neigung  $\operatorname{tg} u_1'$  im Bildraum geschieht natürlich in Wirklichkeit nicht sprunghaft, sondern stetig. Einen solchen Strahl können wir nun durch die Gleichung

$$(50) \quad \rho_1 = \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4c_1 + (z - z_5)^2} + \frac{1}{2}(z - z_5) - K_1 \right] \operatorname{tg} u_1'$$

darstellen, wo wir noch annehmen wollen, daß

$$c_1 \ll K_1 \quad \text{und} \quad c_1 > 0; \quad K_1 > 0$$

ist.

Ist  $|z - z_5| \gg 4c_1$  und  $z - z_5 < 0$  (Objektraum), so wird

$$(51) \quad \rho_1 \approx - \left\{ K_1 - \frac{c_1}{z_5 - z} \right\} \operatorname{tg} u_1' \approx - K_1 \operatorname{tg} u_1'.$$

Ist  $|z - z_5| \gg 4c_1$  und  $z - z_5 > 0$  (Bildraum), so wird

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \approx - \left\{ K_1 - (z - z_5) - \frac{c_1}{z - z_5} \right\} \operatorname{tg} u_1' \\ \approx z \operatorname{tg} u_1' - (K_1 + z_5) \operatorname{tg} u_1' \end{array} \right.$$

Aus (51) sehen wir, daß der Strahl im Objektraum achsenparallel verläuft und von der Achse den Abstand  $-K_1 \operatorname{tg} u_1'$  hat. (52) sagt aus, daß der Strahl  $\rho_1$  im Bildraum geradlinig unter der Neigung  $\operatorname{tg} u_1'$  verläuft und die Achse im Punkte

$$(53) \quad z_1 \approx z_5 + K_1 - \frac{c_1}{K_1} \approx z_5 + K_1$$

schnidet, wo  $K_1$  = dem objektseitigen Achsenabstand dividiert durch die bildseitige Neigung  $|\operatorname{tg} u_1'|$  ist. Außerdem erkennen wir aus (52), daß der bildseitige Strahl, rückwärts verlängert, die zweite Hauptebene ( $z = z_5$ ) im Achsenabstand  $-K_1 \operatorname{tg} u_1'$ , d. h. im Achsenabstand des objektseitigen Strahles, schneidet.

Aus (53) folgt noch für die bildseitige Brennweite

$$(54) \quad f' = z_1 - z_5 = K_1 - \frac{c_1}{K_1} \approx K_1.$$

Ganz entsprechend können wir einen Strahl  $\rho_2 = \rho_2(z)$ , der in Richtung  $\operatorname{tg} u_2$  durch den vorderen Brennpunkt  $z_0$  geht und im Bildraum demnach den Achsenabstand  $+K_2 \operatorname{tg} u_2$  hat, darstellen durch

$$(55) \quad \rho_2 = - \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4c_2 + (z - z_4)^2} + \frac{1}{2}(z - z_4) - K_2 \right] \operatorname{tg} u_2,$$

wo wieder  $c_2 > 0$ ;  $K_2 > 0$  und  $c_2 \ll K_2$  sei. Ist jetzt  $|z - z_4| \gg 4c_2$  und  $z - z_4 < 0$  (Objektraum), so wird

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_2 \approx + \left\{ K_2 - (z_4 - z) - \frac{c_2}{z_4 - z} \right\} \operatorname{tg} u_2 \\ \approx z \operatorname{tg} u_2 + (K_2 - z_4) \operatorname{tg} u_2. \end{array} \right.$$

Ist dagegen  $|z - z_4| \gg 4c_2$  und  $z - z_4 > 0$  (Bildraum), so wird

$$(57) \quad \rho_2 \approx + \left\{ K_2 - \frac{c_2}{z - z_4} \right\} \operatorname{tg} u_2 \approx + K_2 \operatorname{tg} u_2.$$

Aus (56) entnehmen wir, daß der Strahl im Objektraum geradlinig in Richtung  $\operatorname{tg} u_2$  verläuft und die Achse im Punkte

$$(58) \quad z_0 = z_4 - K_2 + \frac{c_2}{K_2} \approx z_4 - K_2$$

schnidet, so daß

$$(59) \quad f = z_0 - z_4 = -K_2 + \frac{c_2}{K_2} \approx -K_2$$

ist. Ferner schneidet die Verlängerung des objektseitigen Strahles die erste Hauptebene in einem Achsenabstand  $+K_2 \operatorname{tg} u_2$ , der nach (57) mit dem Achsenabstand des bildseitigen Strahles übereinstimmt.

§ 15. Berechnung der zu einer vorgegebenen Brennweite gehörigen Potentialverteilung

Um die Potentialverteilung zu bestimmen, die einem parallel zur Achse einfallenden Strahl den durch (50) gegebenen Verlauf aufzwinge — anders ausgedrückt: um eine Potentialverteilung zu finden, deren hinterer Hauptpunkt und hinterer Brennpunkt (und demgemäß: deren hintere Brennweite) vorgegeben sind — suchen wir die Reihendarstellung von (50) und bestimmen mit Benutzung derselben aus (32) die Reihendarstellung von  $F(z)$ , aus der sich nach (24)  $\Phi(z)$  berechnen lässt.

Aus (50) erhalten wir mit

$$4c_1 = c^2; \quad \frac{z - z_b}{c} = \zeta; \quad \frac{2K_1}{c} = K; \quad \frac{2\varrho_1}{c \operatorname{tg} u_1'} = \varrho$$

$$(60) \quad \varrho = -K + \zeta + \sum_0^{\infty} \left( \frac{1}{\nu} \right) \zeta^{2\nu}.$$

Dann ist also

$$b_0 = 1 - K; \quad b_1 = 1; \quad b_2 = \left( \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2}$$

$$b_3 = b_5 = b_7 = \dots = b_{2\nu+1} = \dots = 0$$

$$b_4 = \left( \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{8}; \quad b_6 = \left( \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{16}; \quad \dots$$

$$b_{2\nu} = \left( \frac{1}{\nu} \right); \quad \dots$$

Setzen wir diese Werte in (32) ein, so erhalten wir, da  $a_0$  und  $a_1$  beliebig gewählt werden können, die beiden Lösungen

$$(61) \quad F_1(\zeta) = \sum_0^{\infty} a_i \zeta^i; \quad F_2(\zeta) = \sum_0^{\infty} a_i' \zeta^i.$$

Die Koeffizienten der ersten Lösung sind

$$(62) \quad \begin{cases} a_0 = 1; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = \frac{2}{K-1}; \quad a_3 = \frac{2}{(K-1)^2}; \\ a_4 = \frac{2}{(K-1)^3} + \frac{3}{2(K-1)^2} - \frac{1}{2(K-1)}; \quad a_5 = \dots \end{cases}$$

Für die Koeffizienten der zweiten Lösung ergibt sich entsprechend

$$(63) \quad \begin{cases} a_0' = 0; \quad a_1' = 1; \quad a_2' = \frac{1}{K-1}; \\ a_3' = \frac{1}{(K-1)^2} + \frac{1}{K-1}; \\ a_4' = \frac{1}{(K-1)^3} + \frac{7}{4(K-1)^2}; \quad a_5' = \dots \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung von (31) wird demnach

$$(64) \quad F(\zeta) = C_1 \cdot F_1(\zeta) + C_2 \cdot F_2(\zeta).$$

Für die Potentialverteilung längs der Achse erhalten wir aus (24)

$$(65) \quad \Phi(\zeta) = E - F(\zeta).$$

Die Koeffizienten  $C_1$  und  $C_2$  lassen sich noch so bestimmen, daß  $\Phi(z)$  und demnach  $\Phi(\zeta)$  im Objektraum ( $\zeta < 0$ ) und Bildraum ( $\zeta > 0$ ) bestimmte vorgeschriebene Werte annimmt.

Ganz ähnlich können wir auch unter Benutzung des zweiten Fundamentalstrahles (55) die Potentialverteilung  $\Phi(\zeta)$  bestimmen, wenn die Lage des vorderen Brennpunktes und des vorderen Hauptpunktes, d. h. die vordere Brennweite gegeben ist.

Für Werte von  $z$ , für die  $\frac{z - z_b}{c} > 1$  ist, wird es vorteilhaft sein, die Wurzel in (50) nach fallenden Potenzen von  $\zeta$  zu entwickeln und auf die so erhaltene Reihe die Formeln (33) anzuwenden, die hier allerdings noch etwas zu modifizieren sind, da in der Reihenentwicklung von  $\varphi$  außer den negativen Potenzen von  $\zeta$  auch noch  $\zeta^{+1}$  auftritt. Wir wollen indessen hierauf nicht näher eingehen.

#### § 16. Angenäherte Bestimmung der Brechkraft einer gegebenen Potentialverteilung

Während wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, wie wir eine Potentialverteilung bestimmen können, deren vordere und hintere Brennweite bestimmte vorgegebene Werte haben, und deren Hauptpunkte an bestimmten vorgegebenen Stellen liegen, so kann jetzt umgekehrt die Brennweite  $f'$

$$\left( \text{Brechkraft} = \frac{A \sqrt{E - \Phi_1}}{f'} = - \frac{A \sqrt{E - \Phi_0}}{f} \right)$$

bestimmt werden, wenn die Potentialverteilung  $\varphi(\varrho, z)$  bzw.  $\Phi(z)$  gegeben ist.

Wir betrachten die Flächen konstanten  $\varphi$ -Wertes. Für diese gilt also

$$\varphi(\varrho, z) = \text{const} = C,$$

also

$$\chi(\varrho, z) \equiv \varphi(\varrho, z) - C = 0.$$

Für den Krümmungsradius dieser Flächen  $\chi(\varrho, z) = 0$  gilt die bekannte Formel

$$r = - \frac{\left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial \varrho} \right)^2 \right]^{1/2}}{\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \varrho} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varrho \partial z} \frac{\partial \chi}{\partial \varrho} \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varrho^2} \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)^2}.$$

Für  $\varrho = 0$ , also in den Schnittpunkten der Achse mit den Flächen  $\chi(\varrho, z) = 0$ , wird nach (12)–(14)

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varrho} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} = 0; \quad \frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{d \Phi}{d z}$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi}{d z^2}; \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varrho \partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = \frac{d^2 \Phi}{d z^2},$$

so daß

$$(66) \quad r = 2 \frac{\frac{d \Phi}{d z}}{\frac{d^2 \Phi}{d z^2}}.$$

Für die „Brechkraft“ derjenigen „Fläche“, die die Achse an der Stelle  $z$  schneidet, gilt

$$D(z) = \frac{d n}{r} = \frac{1}{r} \frac{d n}{d z} d z.$$

Nun ist

$$(66*) \quad n = A \sqrt{E - \Phi(\varrho, z)} = A \sqrt{E - \Phi(z)},$$

also

$$\left( \frac{d n}{d z} \right)_{\varrho=0} = - \frac{A \frac{d \Phi}{d z}}{2 \sqrt{E - \Phi(z)}},$$

wo  $A$  ein Proportionalitätsfaktor ist. Hiermit wird

$$(67) \quad D(z) = - \frac{A \frac{d^2 \Phi}{d z^2}}{4 \sqrt{E - \Phi(z)}} d z.$$

Für eine aus mehreren Einzelbrechkräften  $D_i$  zusammengesetzte Brechkraft  $D$  gilt  $D = \sum D_i +$  einer Funktion  $g$ , die außer von den  $D_i$  wesentlich von den Abständen abhängt, die die einzelnen brechenden Flächen voneinander haben. In erster Näherung aber können wir diese Funktion vernachlässigen und erhalten dann für die Gesamtbrechkraft unseres Potentialgefälles

$$(68) \quad D = - \frac{A}{4} \int \frac{d^2 \Phi}{d z^2} \frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}} d z.$$

Für die hintere Brennweite ergibt sich<sup>1)</sup>

$$(69) \quad f' = - \frac{4 \sqrt{E - \Phi_1}}{\int \frac{d^4 \Phi}{dz^4} \frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}} dz}$$

und für die vordere Brennweite

$$(69^*) \quad f = + \frac{4 \sqrt{E - \Phi_0}}{\int \frac{d^4 \Phi}{dz^4} \frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}} dz}.$$

Die Integration ist hier zu erstrecken über das ganze Potentialgefälle, also vom Objektraum ( $\Phi = \Phi_0$ ) bis zum Bildraum ( $\Phi = \Phi_1$ ).

**§ 17. Brechkraft einer Reihe aufeinanderfolgender Medien von verschiedenem Brechungsindex, verschieden gekrümmten Begrenzungsfächen und gleicher, sehr kleiner Mittendicke**

Die Formeln (68), (69), (69\*) gelten, wie schon gesagt, nur angenähert. Wir wollen versuchen, den Fehler abzuschätzen, den wir bei Benutzung dieser Formeln machen. Zu diesem Zwecke denken wir uns in dem Potentialfeld längs der  $z$ -Achse die Strecke  $\Delta z$  vom im Objektraum gelegenen Punkte  $z_0$  aus hintereinander abgetragen und die durch die Punkte  $z_0, z_0 + \Delta z, z_0 + 2\Delta z, \dots, z_0 + n\Delta z, \dots$  gehenden Flächen  $\varphi(\varrho, z) = \text{const}$  gelegt. Zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Flächen können wir dann den Brechungsindex  $n$  als konstant annehmen, während die Differenz zweier aufeinanderfolgender  $n$ -Werte durch  $\frac{dn}{dz} \Delta z$  gegeben ist, wo  $dn/dz$  an der Stelle  $z = z_0 + n\Delta z$  zu nehmen ist. Wir berechnen dann nach (67) die Brechkraft der einzelnen Flächen, also

$$(70) \quad D_n = D_{z=z_0+n\Delta z} = - \left( \frac{A}{4 \sqrt{E - \Phi(z)}} \frac{d^4 \Phi}{dz^4} \right)_{z=z_0+n\Delta z} \cdot \Delta z.$$

1) Wie mir Hr. Prof. v. Laue nach Fertigstellung dieser Arbeit mitteilte, hat Hr. Johannson in seinem Vortrag auf dem 8. Deutschen Physikertag in Bad Nauheim eine gleiche oder ähnliche Formel angegeben. — *Anmerkung bei der Korrektur:* Inzwischen habe ich von Hrn. Johannson erfahren, daß seine Formel lautet:

$$f' = - \frac{8 \sqrt{E - \Phi_1}}{\int \left( \frac{d \Phi}{dz} \right)^2 \frac{1}{(E - \Phi(z))^{5/2}} dz}.$$

Sie ergibt sich aus (60) durch partielle Integration unter der meist zutreffenden Annahme, daß  $\frac{d \Phi}{dz}$  im Objektraum und Bildraum verschwindet.

Für die aus zwei Einzelbrechkräften kombinierte Brechkraft gilt nun bekanntlich

$$(71) \quad D_{12} = D_1 + D_2 - \frac{d}{n_{12}} D_1 D_2,$$

wo  $d$  der Abstand des vorderen zu  $D_2$  gehörigen Hauptpunktes  $H_2$  vom hinteren zu  $D_1$  gehörigen Hauptpunkt  $H_1'$  ist.

Ferner gilt für den Abstand  $h_{12}$  des vorderen zu  $D_{12}$  gehörigen Hauptpunktes  $H_{12}$  vom hinteren zu  $D_1$  gehörigen Hauptpunkt  $H_1'$

$$(72) \quad h_{12} = \frac{n_{01} D_2}{n_{12} D_{12}} d$$

und entsprechend für den Abstand  $h'_{12}$  des hinteren zu  $D_{12}$  gehörigen Hauptpunktes  $H'_{12}$  vom vorderen zu  $D_2$  gehörigen Hauptpunkt  $H_2$

$$(73) \quad h'_{12} = - \frac{n_{23} D_1}{n_{12} D_{12}} d.$$

Bei einer einzelnen brechenden Fläche fallen die beiden Hauptpunkte mit dem Achsenschnittpunkt der Fläche selbst zusammen, so daß für zwei Nachbarflächen  $d = \Delta z$  wird.

Um die gesamte Brennweite unserer „Linsenkombination“ zu berechnen, verfahren wir folgendermaßen. Wir kombinieren zunächst die Flächen  $D_0$  und  $D_1$  und haben hierfür

$$D_{01} = D_0 + D_1 - \frac{D_0 D_1}{n_{01}} \Delta z,$$

$$h'_{01} = - \frac{n_{12}}{n_{01}} \frac{D_0}{D_{01}} \Delta z.$$

Wir fügen Fläche  $D_2$  hinzu und beachten, daß jetzt

$$d = \Delta z - h'_{01} = \Delta z + \frac{n_{12}}{n_{01}} \frac{D_0}{D_{01}} \Delta z$$

ist. Demnach wird

$$D_{012} = D_{01} + D_2 - \frac{D_{01} D_2}{n_{12}} \Delta z - \frac{D_0 D_2}{n_{01}} \Delta z$$

$$= D_0 + D_1 + D_2 - \Delta z \left[ \frac{D_0 D_1}{n_{01}} + \frac{D_0 D_2}{n_{12}} + \frac{D_1 D_2}{n_{01}} + \frac{D_0 D_2}{n_{01}} \right]$$

$$+ \Delta z^2 \frac{D_0 D_1 D_2}{n_{01} n_{12}},$$

$$h'_{012} = - \frac{n_{23}}{n_{12}} \frac{D_{01}}{D_{012}} \Delta z - \frac{n_{23}}{n_{01}} \frac{D_0}{D_{012}} \Delta z$$

$$= - \Delta z \left[ \frac{n_{23}}{n_{12}} \frac{D_0}{D_{012}} + \frac{n_{23}}{n_{12}} \frac{D_1}{D_{012}} + \frac{n_{23}}{n_{01}} \frac{D_0}{D_{012}} \right]$$

$$+ \Delta z^2 \frac{n_{23}}{n_{01} n_{12}} \frac{D_0 D_1}{D_{012}}.$$

Da wir  $\Delta z$  als sehr klein vorausgesetzt haben, wollen wir  $\Delta z^2$  und höhere Potenzen vernachlässigen.

Nehmen wir jetzt noch  $D_3$  hinzu, so gilt für diese Kombination zunächst

$$d = \Delta z - h'_{012} = \Delta z + \frac{n_{23}}{D_{012}} \Delta z \left( \frac{D_0}{n_{01}} + \frac{D_0}{n_{12}} + \frac{D_1}{n_{12}} \right).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} D_{0123} &= D_{012} + D_3 - \frac{D_{012} D_3}{n_{23}} \Delta z - \Delta z \left( \frac{D_0 D_3}{n_{01}} + \frac{D_0 D_3}{n_{12}} + \frac{D_1 D_3}{n_{12}} \right) \\ &= D_0 + D_1 + D_2 + D_3 - \Delta z \left[ \frac{D_0 D_1}{n_{01}} + \frac{D_0 D_2}{n_{01}} + \frac{D_0 D_2}{n_{12}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_0 D_3}{n_{01}} + \frac{D_0 D_3}{n_{12}} + \frac{D_0 D_3}{n_{23}} + \frac{D_1 D_2}{n_{12}} + \frac{D_1 D_3}{n_{12}} + \frac{D_2 D_3}{n_{23}} \right]. \end{aligned} \quad (76)$$

Hier sind wieder die Glieder mit  $\Delta z^2, \dots$  vernachlässigt. Ferner wird mit der gleichen Vernachlässigung:

$$\begin{aligned} h'_{0123} &= - \frac{n_{24}}{n_{23}} \frac{D_{012}}{D_{0123}} \Delta z - \frac{n_{24}}{D_{0123}} \Delta z \left( \frac{D_0}{n_{01}} + \frac{D_0}{n_{12}} + \frac{D_1}{n_{12}} \right) \\ &= - \frac{n_{24}}{D_{0123}} \Delta z \left( \frac{D_0}{n_{01}} + \frac{D_0}{n_{12}} + \frac{D_0}{n_{23}} + \frac{D_1}{n_{12}} + \frac{D_1}{n_{23}} + \frac{D_2}{n_{23}} \right). \end{aligned} \quad (77)$$

Man erkennt so leicht das Gesetz, nach dem sich das Verfahren fortsetzen lässt, und erhält demnach

$$\begin{aligned} D_0 \dots, &= \sum_0^v D_i - \Delta z \left\{ \frac{D_0}{n_{01}} \sum_1^v D_i + \frac{D_0}{n_{12}} \sum_2^v D_i + \frac{D_0}{n_{23}} \sum_3^v D_i + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_1}{n_{12}} \sum_2^v D_i + \frac{D_1}{n_{23}} \sum_3^v D_i + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_2}{n_{23}} \sum_3^v D_i + \dots \right\}, \end{aligned}$$

$$(74) \quad D_0 \dots, = \sum_0^v D_i - \Delta z \sum_{j=0}^{v-1} \left( \frac{1}{n_{j,j+1}} \cdot \sum_{i=0}^j D_i \cdot \sum_{i=j+1}^v D_i \right),$$

$$(75) \quad h'_0 \dots, = - \frac{n_{v,v+1}}{D_0 \dots,} \Delta z \sum_{j=0}^{v-1} \left( \frac{1}{n_{j,j+1}} \cdot \sum_{i=0}^j D_i \right).$$

Lassen wir jetzt  $Az$  immer mehr abnehmen, so gehen die Formeln (74) und (75) unter Berücksichtigung von (66\*) und (67) über in

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = -\frac{A}{4} \int_{z_0}^{z_1} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}} dz - \frac{A}{16} \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}} \right. \\ \cdot \int_{z_0}^z \frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} \frac{d\zeta}{\sqrt{E - \Phi(\zeta)}} \cdot \int_z^{z_1} \frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} \frac{d\zeta}{\sqrt{E - \Phi(\zeta)}} \left. \right\} dz, \end{array} \right.$$

$$(77) \quad h' = -\frac{A}{4} \frac{\sqrt{E - \Phi_1}}{D} \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}} \cdot \int_{z_0}^z \frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} \frac{d\zeta}{\sqrt{E - \Phi(\zeta)}} \right\} dz,$$

wo  $z_0$  ein Achsenpunkt im „Objektraum“,  $z_1$  ein Achsenpunkt im „Bildraum“ ist.  $h'$  ist der Abstand des hinteren Hauptpunktes vom Punkte  $z_1$ .

Für die von diesem hinteren Hauptpunkte aus gemessene hintere Brennweite  $f'$  ergibt sich dann wieder analog zu (69)

$$(78) \quad f' = + \frac{A \sqrt{E - \Phi_1}}{D}.$$

Für den Abstand des vorderen Hauptpunktes vom Punkte  $z_0$  ergibt sich entsprechend

$$(77^*) \quad h = + \frac{A}{4} \frac{\sqrt{E - \Phi_0}}{D} \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}} \cdot \int_z^{z_1} \frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} \frac{d\zeta}{\sqrt{E - \Phi(\zeta)}} \right\} dz$$

und für die vordere Brennweite, gemessen vom vorderen Hauptpunkte aus

$$(78^*) \quad f = - \frac{A \sqrt{E - \Phi_0}}{D}.$$

### § 18. Berechnung der Lage zweier (spezieller) konjugierter Punkte und des Vergrößerungsverhältnisses in ihnen im Anschluß an Gullstrands „Die optische Abbildung in heterogenen Medien...“

Wir wollen nun noch die von Gullstrand in der oben genannten Arbeit abgeleiteten Formeln für Brechkraft und Hauptpunktsabstände hier angeben, ohne ausführlich auf die Herleitung dieser Formeln einzugehen.

Sind  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungskosinus der Elektronenstrahlen,  $ds$  das Linienelement dieser Strahlen und  $n = A \sqrt{E - \varphi(\varrho, z)}$  der Brechungsindex, so gilt die Gleichung

$$(79) \quad d n = \frac{d(n\alpha)}{ds} dx + \frac{d(n\beta)}{ds} dy + \frac{d(n\gamma)}{ds} dz.$$

Hieraus läßt sich ableiten, daß

$$(80) \quad n ds = n(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = dV$$

ein vollständiges Differential ist, daß also

$$(81) \quad n \mathbf{\hat{s}} = \text{grad } V,$$

wo  $\mathbf{\hat{s}} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  der Einheitsvektor in Richtung der Strahlen ist. Die Flächen  $V = \text{const}$  sind die „Wellenflächen“.

Wir betrachten nun eine dieser Wellenflächen und auf dieser einen Punkt  $P$  und den durch  $P$  hindurchgehenden Strahl. Die Hauptkrümmungsradien der Wellenfläche im Punkte  $P$  seien  $r_1, r_2$ . Das Koordinatensystem  $x_n, y_n, z_n$  sei so gewählt, daß  $P$  der Nullpunkt ist, daß die  $z_n$ -Achse mit der Strahlrichtung, also mit der Tangente an den Strahl durch  $P$ , im Punkte  $P$  zusammenfällt, und daß die  $x_n$ - und  $y_n$ -Achse mit den Tangenten in  $P$  an die Wellenfläche in Richtung des ersten  $(x_n; r_1)$  bzw. des zweiten  $(y_n; r_2)$  Hauptschnittes zusammenfallen. Ferner sei  $d\vartheta$  der Winkel, um den sich der erste Hauptschnitt beim Übergang zu den Nachbarwellenflächen dreht, gemessen gegen die  $x_n z_n$ -Ebene. Dann gelten die Differentialgleichungen für  $r_1, r_2, \vartheta$ ,

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds} \left( \frac{n}{r_1} \right) - \frac{n}{r_1^2} = \frac{2}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial x_n} \right)^2 - \frac{\partial^2 n}{\partial x_n^2}, \\ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \frac{d(n\vartheta)}{ds} = \frac{2}{n} \frac{\partial n}{\partial x_n} \frac{\partial n}{\partial y_n} - \frac{\partial^2 n}{\partial x_n \partial y_n}, \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{n}{r_2} \right) - \frac{n}{r_2^2} = \frac{2}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial y_n} \right)^2 - \frac{\partial^2 n}{\partial y_n^2}. \end{array} \right.$$

Ist speziell  $r_1 = 0$ , so gehen die ersten beiden Gleichungen über in

$$(82^*) \quad \frac{dr_1}{ds} = -1; \quad \frac{d\vartheta}{ds} = 0.$$

Die angegebenen Gl. (82) bzw. (82\*) dienen also zur Bestimmung der Brennpunkte auf der  $z_n$ -Achse, wobei die allmähliche Änderung der Lage des Koordinatensystems zu beachten ist.

Wir betrachten jetzt ein kleines Flächenelement als Objekt, dessen Mittelpunkt wir als Objektzentrum bezeichnen, zum Unterschied von dem Blendenzentrum, dem Schnittpunkt der zu den einzelnen Objektpunkten gehörigen Hauptstrahlen. Als Objektwellenfläche bezeichnen wir die Wellenfläche des vom Objektzentrum ausgegangenen Lichtes, als Blendewellenfläche die Wellenfläche des Lichtes, das man sich als vom Blendenzentrum

zentrum ausgegangen denken kann. Als „Fokalkoordinaten“ seien die Abstände der *Normalen* der *Blendenwellenfläche* von den beiden Brennlinien des Normalenbündels der *Objektwellenfläche* definiert, die wie oben durch  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\vartheta$  bestimmt sei. Die Fokalkoordinaten seien  $a_1$  und  $a_2$ . Dann gelten für die Differentiale  $da_1$ ,  $da_2$  dieser Fokalkoordinaten beim Übergang zur Nachbarwellenfläche

$$(83) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds} da_1 = \left( \frac{dr_1}{ds} + 1 - \frac{r_1}{n} \frac{dn}{ds} \right) \frac{da_1}{r_1} + r_1 \frac{d\vartheta}{ds} \frac{da_2}{r_2}, \\ \frac{d}{ds} da_2 = -r_2 \frac{d\vartheta}{ds} \frac{da_1}{r_1} + \left( \frac{dr_2}{ds} + 1 - \frac{r_2}{n} \frac{dn}{ds} \right) \frac{da_2}{r_2}, \end{cases}$$

die für den speziellen Fall, daß z. B.  $r_1 = 0$  ist, übergehen in

$$(83^*) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds} da_1 = 0, \\ \frac{d}{ds} da_2 = -\frac{r_2}{n} \left( \frac{2}{n} \frac{\partial n}{\partial x_n} \frac{\partial n}{\partial y_n} - \frac{\partial^2 n}{\partial x_n \partial y_n} \right) da_1 \\ \quad + \left( \frac{dr_2}{ds} + 1 - \frac{r_2}{n} \frac{dn}{ds} \right) \frac{da_2}{r_2}. \end{cases}$$

In (83), (83\*) treten keine auf die Blendenlage bezüglichen Größen auf.

Auf dem Flächenelement gibt es nun im allgemeinen nur zwei (orthogonale) Linienelemente  $ds_1$ ,  $ds_2$ , die in der Ebene der ersten bzw. zweiten Brennlinie der Objektwellenfläche abgebildet werden. Setzen wir nun

$$da_1 = \beta_1' ds_1; \quad da_2 = \beta_2' ds_2,$$

so können wir  $\beta_1'$ ,  $\beta_2'$  — im übertragenen Sinn — als „Vergrößerungskoeffizienten“ bezeichnen.

Betrachten wir jetzt einen auf der  $z$ -Achse gelegenen Punkt und in diesem Punkt ein zur  $z$ -Achse senkrecht Flächenelement, so sind alle zum Objektzentrum gehörigen Wellenflächen durch unser ganzes Potentialgefälle hindurch rotationssymmetrisch, da ja auch der Brechungsindex eine zur  $z$ -Achse rotationssymmetrische Funktion ist. Es ist dann

$$r_1 = r_2 (= r); \quad d\vartheta = 0; \quad \beta_1' = \beta_2' (= \beta'),$$

und unsere Gl. (82) und (83) lauten jetzt

$$(84) \quad \frac{d}{dz} \left( \frac{n}{r} \right) - \frac{n}{r^2} = -\frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

$$(85) \quad \frac{d}{dz} \left( \frac{n\beta'}{r} \right) - \frac{n\beta'}{r^2} = 0.$$

Gullstrand wendet diese Gleichungen auf die Kristalllinse des menschlichen Auges zur Bestimmung ihrer Brechkraft und der Lage ihrer Hauptpunkte an, indem er im Innern der Kristalllinse auf der Achse (etwa in der Mitte der Linse) ein kleines Flächenelement als Objekt annimmt und die von diesem Objekt ausgehenden Strahlen nach beiden Seiten mit Hilfe der Gl. (84) und (85) verfolgt. Wir übertragen dies Verfahren auf unseren Fall der Elektronenstrahlen.

Ist  $\zeta$  die  $z$ -Koordinate des Krümmungsmittelpunktes derjenigen Wellenfläche, die die  $z$ -Achse im Punkte  $z$  schneidet, so ist  $r = \zeta - z$ , und die Gl. (84) und (85) gehen über in

$$(86) \quad n \cdot d\zeta = \left( r^2 \frac{\partial^2 n}{\partial \varrho^2} + r \frac{\partial n}{\partial z} \right) dz, \quad (90)$$

$$(87) \quad n \cdot d\beta' = r \beta' \frac{\partial^2 n}{\partial \varrho^2} dz,$$

wo:

$$r = r(z) = \zeta - z.$$

Wir wählen den Achsenschnittpunkt des genannten kleinen Flächenelementes zum Nullpunkt der  $z$ -Achse und entwickeln

$$n = A \sqrt{E - \varphi(\varrho, z)}$$

nach Potenzen von  $\varrho, z$ . Ferner bilden wir die 1., 2., 3., 4., ... Differentialquotienten der Gl. (86) und (87), setzen in diesen

$$n = n_0 (= A \sqrt{E - \varphi(0)}) ; \quad \zeta = r = 0 ; \quad \beta' = 1$$

und erhalten so die Differentialquotienten von  $\zeta$  und  $\beta'$  im Punkte  $z = 0$ , mit denen wir für  $\zeta$  und  $\beta'$  die Reihenentwicklung finden:

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \frac{z^3}{3n_0} \left( \frac{\partial^2 n}{\partial \varrho^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right)_0 + \frac{z^4}{8n_0} \left( 2 \frac{\partial^3 n}{\partial z \partial \varrho^2} - \frac{\partial^3 n}{\partial z^3} \right)_0 \\ \quad + \frac{z^5}{30n_0} \cdot \left\{ 3 \frac{\partial^4 n}{\partial z^2 \partial \varrho^2} - \frac{\partial^4 n}{\partial z^4} + \frac{1}{n} \left( \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + 4 \frac{\partial^2 n}{\partial \varrho^2} \right) \right. \\ \quad \cdot \left. \left( \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial \varrho^2} \right) \right\}_0 + \dots \end{array} \right.$$

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta' = 1 - \frac{z^3}{2n_0} \left( \frac{\partial^2 n}{\partial \varrho^2} \right)_0 - \frac{z^5}{3n_0} \left( \frac{\partial^3 n}{\partial z \partial \varrho^2} \right)_0 \\ \quad - \frac{z^4}{24n_0} \cdot \left\{ 3 \frac{\partial^4 n}{\partial z^2 \partial \varrho^2} - \frac{1}{n} \frac{\partial^2 n}{\partial \varrho^2} \left( \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + 5 \frac{\partial^2 n}{\partial \varrho^2} \right) \right\}_0 - \dots \end{array} \right.$$

Beachten wir jetzt die Formeln (12) bis (14), so sehen wir, daß

$$\left. \begin{aligned}
 \left( \frac{\partial^3 n}{\partial \varrho^2} \right)_0 &= \frac{A}{4 n_0} \left( \frac{d^3 \Phi}{d z^2} \right)_0 \\
 \left( \frac{\partial^3 n}{\partial z^2} \right)_0 &= -\frac{A}{2 n_0} \left( \frac{d^2 \Phi}{d z^2} \right)_0 - \frac{A^2}{4 n_0^3} \left( \frac{d \Phi}{d z} \right)_0^2 \\
 \left( \frac{\partial^3 n}{\partial \varrho^2 \partial z} \right)_0 &= \frac{A}{4 n_0} \left( \frac{d^3 \Phi}{d z^3} \right)_0 + \frac{A^2}{8 n_0^5} \left( \frac{d^2 \Phi}{d z^2} \right)_0 \left( \frac{d \Phi}{d z} \right)_0 \\
 \left( \frac{\partial^3 n}{\partial z^3} \right)_0 &= -\frac{A}{2 n_0} \left( \frac{d^3 \Phi}{d z^3} \right)_0 - \frac{3 A^2}{4 n_0^5} \left( \frac{d^2 \Phi}{d z^2} \right)_0 \left( \frac{d \Phi}{d z} \right)_0 \\
 &\quad - \frac{3 A^3}{8 n_0^5} \left( \frac{d \Phi}{d z} \right)_0^3 \\
 \left( \frac{\partial^4 n}{\partial \varrho^2 d z^2} \right)_0 &= \frac{A}{4 n_0} \left( \frac{d^4 \Phi}{d z^4} \right)_0 + \frac{A^2}{4 n_0^3} \left( \frac{d^3 \Phi}{d z^3} \right)_0 \left( \frac{d \Phi}{d z} \right)_0 \\
 &\quad + \frac{3 A^3}{16 n_0^5} \left( \frac{d^2 \Phi}{d z^2} \right)_0 \left( \frac{d \Phi}{d z} \right)_0^2 + \frac{A^2}{8 n_0^3} \left( \frac{d^2 \Phi}{d z^2} \right)_0^2 \\
 \left( \frac{\partial^4 n}{\partial z^4} \right)_0 &= -\frac{A}{2 n_0} \left( \frac{d^4 \Phi}{d z^4} \right)_0 - \frac{A^2}{n_0^3} \left( \frac{d^3 \Phi}{d z^3} \right)_0 \left( \frac{d \Phi}{d z} \right)_0 \\
 &\quad - \frac{9 A^3}{4 n_0^5} \left( \frac{d^2 \Phi}{d z^2} \right)_0 \left( \frac{d \Phi}{d z} \right)_0^2 - \frac{15 A^4}{16 n_0^7} \left( \frac{d \Phi}{d z} \right)_0^4 \\
 &\quad - \frac{3 A^2}{4 n_0^3} \left( \frac{d^2 \Phi}{d z^2} \right)_0^2
 \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

ist. Diese Werte haben wir in (88) und (89) einzusetzen.

Setzen wir in (88) und (89) für  $z$  die Werte, bis zu denen sich die Potentialverteilung nach der einen bzw. nach der anderen Richtung erstreckt, also etwa  $z = z_0$  (im Objektraum) bzw.  $z = z_1$  (im Bildraum), so erhalten wir aus (88) die Krümmungsmittelpunkte  $\zeta_0$ ,  $\zeta_1$  der durch  $z_0$  bzw.  $z_1$  gehenden Wellenflächen — also zwei zueinander konjugierte, d. h. in der Beziehung: Objektpunkt—Bildpunkt stehende Punkte und aus (89) in  $\beta_1'/\beta_0'$  den zugehörigen Vergrößerungskoeffizienten.

### § 19. Berechnung der Brechkraft und der Lage der Hauptpunkte unter Benutzung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen

Aus den so gewonnenen Werten können wir schon angenähert die Brechkraft der Potentialverteilung bestimmen, wenn wir den Abstand der beiden Hauptpunkte voneinander vernachlässigen, sie also als zusammenfallend annehmen. Ihre gemeinsame  $z$ -Koordinate sei  $z_H$ . Es gelten die drei Gleichungen:

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = D \\ -a + a' = \zeta_1 - \zeta_0 \\ \frac{n a'}{n' a} = \frac{\beta_1'}{\beta_0'} \\ \text{mit} \\ n' = A \sqrt{E - \Phi_0}; \quad n = A \sqrt{E - \Phi_0}, \end{array} \right. \quad (95)$$

wo  $a$  der Abstand des Punktes  $\zeta_0$  von  $z_H$ , also  $a = \zeta_0 - z_H$ , und  $a'$  der Abstand des Punktes  $\zeta_1$  von  $z_H$ , also  $a' = \zeta_1 - z_H$  ist. Wir erhalten dann

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = n \beta_0' \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{n' \beta_1' - n \beta_0'}; \quad a' = n' \beta_1' \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{n' \beta_1' - n \beta_0'}; \\ D = \left( \frac{1}{\beta_1'} - \frac{1}{\beta_0'} \right) \frac{n' \beta_1' - n \beta_0'}{\zeta_1 - \zeta_0}; \quad z_H = \frac{\zeta_0 n' \beta_1' - \zeta_1 n \beta_0'}{n' \beta_1' - n \beta_0'}. \end{array} \right.$$

Eine bereits wesentlich genauere Bestimmung von  $D$  und eine angenäherte Bestimmung der Lage der beiden — jetzt nicht mehr zusammenfallend angenommenen — Hauptpunkte können wir folgendermaßen durchführen. Wir wenden die Formeln (92) auf jeden der beiden sich von  $z_0$  bis  $z = 0$  bzw. von  $z = 0$  bis  $z_1$  erstreckenden Teile des Potentialgefälles an, wobei wir die so erhaltenen Teilbrechkkräfte mit  $D_0$  bzw.  $D_1$  und die beiden  $z_H$ -Werte mit  $z_{H_0}$  bzw. mit  $z_{H_1}$  bezeichnen. Zu beachten haben wir dabei aber, daß wir in den Formeln (92) für  $D_0$  und  $z_{H_0}$

$$\zeta_1 = 0; \quad \beta_1' = 1; \quad n' = A \sqrt{E - \Phi(0)} = n_0$$

und in den Formeln (92) für  $D_1$  und  $z_{H_1}$

$$\zeta_0 = 0; \quad \beta_0' = 1; \quad n = A \sqrt{E - \Phi(0)} = n_0$$

zu setzen haben. Wir erhalten dann

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_0 = - \left( 1 - \frac{1}{\beta_0'} \right) \frac{n_0 - n \beta_0'}{\zeta_0}; \quad z_{H_0} = \frac{n_0 \zeta_0}{n_0 - n \beta_0'}; \\ D_1 = + \left( 1 - \frac{1}{\beta_1'} \right) \frac{n_0 - n' \beta_1'}{\zeta_1}; \quad z_{H_1} = \frac{n_0 \zeta_1}{n_0 - n' \beta_1'}. \end{array} \right.$$

Mit diesen Werten können wir dann die Gesamtbrechkraft  $D$  und die Koordinaten  $z_H$ ,  $z_{H'}$  des vorderen und hinteren Hauptpunktes nach den bekannten Formeln:

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = D_0 + D_1 - \frac{d}{n_0} D_0 D_1; \quad z_H = z_{H_0} + \frac{n}{n_0} d \cdot \frac{D_1}{D}; \\ z_{H'} = z_{H_1} - \frac{n'}{n_0} d \cdot \frac{D_0}{D} \end{array} \right.$$

berechnen, wo wir  $d = z_{H_1} - z_{H_0}$  zu setzen haben. Führen wir in (94) die erhaltenen Werte aus (93) ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \frac{1}{\beta_0' \beta_1'} \left\{ (1 - \beta_0) \frac{n_0 - n \beta_0'}{\zeta_0} - (1 - \beta_1) \frac{n_0 - n' \beta_1'}{\zeta_1} \right\} \\ = \frac{D_0}{\beta_1'} + \frac{D_1}{\beta_0'}, \\ z_H = \frac{n_0 \zeta_0}{n_0 - n \beta_0'} + \frac{n}{D} \left( 1 - \frac{1}{\beta_1'} \right) \left( 1 - \frac{\zeta_0}{\zeta_1} \frac{n_0 - n' \beta_1'}{n_0 - n \beta_0'} \right) \\ = \zeta_0 - \frac{n}{D} \frac{\beta_0' - \beta_1'}{\beta_1'}, \\ z_{H'} = \frac{n_0 \zeta_1}{n_0 - n' \beta_1'} - \frac{n'}{D} \left( 1 - \frac{1}{\beta_0'} \right) \left( 1 - \frac{\zeta_1}{\zeta_0} \frac{n_0 - n \beta_0'}{n_0 - n' \beta_1'} \right) \\ = \zeta_1 - \frac{n'}{D} \frac{\beta_0' - \beta_1'}{\beta_0'}, \end{array} \right.$$

worin

$$n = A \sqrt{E - \Phi_0} = A \sqrt{E - \Phi(z_0)};$$

$$n' = A \sqrt{E - \Phi_1} = A \sqrt{E - \Phi(z_1)}; \quad n_0 = A \sqrt{E - \Phi(0)}$$

ist.

Setzen wir in den Formeln (95)  $\beta_0' = \beta_1'$ , also  $\frac{\beta_1'}{\beta_0'} = 1$ , so erhalten wir  $z_H = \zeta_0$ ;  $z_{H'} = \zeta_1$ , d. h. Objektpunkt  $\zeta_0$  und Bildpunkt  $\zeta_1$  fallen mit den Hauptpunkten  $z_H$  bzw.  $z_{H'}$  zusammen, wie dies verlangt werden muß.

Setzen wir andererseits bei  $\zeta_0 \neq z_H$ ;  $\zeta_1 \neq z_{H'}$  die Differenzen  $\zeta_0 - z_H = a$  und  $\zeta_1 - z_{H'} = a'$ , so daß also  $a$  der Abstand des Objektpunktes vom vorderen Hauptpunkt und  $a'$  der Abstand des Bildpunktes vom hinteren Hauptpunkt ist, so ergibt sich aus (95):

$$a = \frac{n}{D} \frac{\beta_0' - \beta_1'}{\beta_1'}; \quad a' = \frac{n'}{D} \frac{\beta_0' - \beta_1'}{\beta_0'}; \\ \frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = D; \quad \frac{a'}{n'} \cdot \frac{n}{a} = \frac{\beta_1'}{\beta_0'}.$$

Wir sehen aus diesen Folgerungen, daß die Lage der Hauptpunkte, also  $z_H$  und  $z_{H'}$  durch (95) trotz der nur näherungsweisen Herleitung exakt gegeben ist.

Voraussetzung bei den vorstehenden Formeln ist natürlich, daß der Abstand der Punkte  $z_0$  und  $z_1$ , also die Differenz  $z_1 - z_0 = z_1 + |z_0|$  nicht zu groß ist, damit die Gl. (88) und (89) für die Werte  $z_0$  und  $z_1$  noch konvergent sind und nicht zu weit entwickelt zu werden brauchen.

Doch auch in diesem Fall geben die hergeleiteten Formeln eine Möglichkeit zur Berechnung der Brechkraft und der Hauptpunktstlage. Man denke sich nämlich das ganze Potentialgefälle zwischen  $z_0$  und  $z_1$  in eine größere Zahl von Teil-

gefälten unterteilt, derart, daß die Begrenzungsfächen jeweils Flächen konstanten Potentials sind. Auf jedes Teilgefälle können die abgeleiteten Formeln (88), (89), (95) angewandt werden, wobei natürlich für jedes Teilgefälle das Koordinatensystem der oben gemachten Annahme entsprechend zu wählen ist. Man erhält so die Brechkräfte und Hauptpunktslagen der einzelnen Teilgefälle, aus denen man dann unter wiederholter Anwendung von (94) die Gesamtbrechkraft und die Lage der Hauptpunkte des Gesamtgefälles berechnen kann.

§ 20. Berechnung der Brechkraft und der Lage der Hauptpunkte im Anschluß an Gullstrand

Für die Berechnung der Brechkraft  $D$  eines aus  $m$  Einzelsystemen bestehenden Systems wurde von Gullstrand<sup>1)</sup> eine Formel entwickelt, die außer von den Einzelbrechkräften  $D_i$  nur noch von den Vergrößerungskoeffizienten  $\beta'_i$  abhängt, wobei sich  $\beta'_i$  auf das aus den Einzelsystemen  $D_1, \dots, D_i$  zusammengesetzte Teilsystem bezieht. Es werde also ein Objektpunkt  $P$  und ein in ihm befindliches abbildbares (achsensenkrechtiges) Linienelement der Größe  $ds$  durch das Teilsystem  $D_1, \dots, D_i$ , bestehend aus den Einzelsystemen  $D_1, D_2, \dots, D_i$  im Punkte  $P'_i$  als Linienelement der Größe  $ds'_i$  abgebildet, und es sei  $\frac{ds'_i}{ds} = \beta'_i$ . Dann gilt für die Gesamtbrechkraft  $D$  die Formel

$$(96) \quad D = \frac{1}{\beta'_m} \sum_1^m \beta'_{i-1} \cdot \beta'_i \cdot D_i,$$

fernern für den Abstand des vorderen Hauptpunktes des Gesamtsystems vom Objektpunkt  $P$  der Wert

$$(97) \quad n \frac{\beta'_m - 1}{\beta'_m D}$$

und für den Abstand des hinteren Hauptpunktes vom Bildpunkt  $P'_m$  der Wert

$$(97^*) \quad n' \frac{\beta'_m - 1}{D}.$$

Für ein System mit kontinuierlich veränderlichem Brechungsindex geht die Formel für  $D$  über in

$$(98) \quad D = \frac{1}{\beta'} \int \beta'^2 \frac{1}{r} \frac{dn}{dz} dz,$$

wo bei uns wieder wie oben (67)

$$(98^*) \quad \frac{1}{r} \frac{dn}{dz} dz = - \frac{A}{4\sqrt{E - \Phi(z)}} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} dz$$

1) A. Gullstrand, Archiv f. Optik 1, S. 2. 1907.

ist und  $\beta'$  den Vergrößerungskoeffizienten des Gesamtsystems bezeichnet.

Gullstrand bestimmt dann nach (98) die Brechkraft  $D_0$  des Teilsystems, das sich von  $z_0$  bis  $z = 0$  erstreckt, sowie die Brechkraft  $D_1$  des Teilsystems, das sich von  $z = 0$  bis  $z_1$  erstreckt. In unserem Fall lauten dann die analogen Gleichungen:

$$(98^{**}) \quad \begin{cases} \beta_0' D_0 = -\frac{A}{4} \int_{z_0}^0 \beta_{(z)}'^2 \frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} dz; \\ \beta_1' D_1 = -\frac{A}{4} \int_0^{z_1} \beta_{(z)}'^2 \frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} dz. \end{cases}$$

Für den Übergang von (98) zu der ersten Gl. (98<sup>\*\*</sup>) ist noch zu beachten, daß wir hierfür zunächst den Wert  $\beta'$  durch  $1/\beta_0'$  und analog den Wert  $\beta'(z)$  durch  $\beta'(z)/\beta_0'$  zu ersetzen haben. Das Produkt  $\frac{1}{\beta'} \cdot \beta_{(z)}'^2$  geht dadurch über in

$$\beta_0' \cdot \left( \frac{\beta'(z)}{\beta_0'} \right)^2 = \frac{1}{\beta_0'} \cdot \beta_{(z)}'^2,$$

bleibt also unverändert. Dies ist natürlich eine selbstverständliche Forderung, da ja die Brechkraft unabhängig davon ist, ob das System von links nach rechts oder von rechts nach links durchstrahlt wird.

Die Gl. (98<sup>\*\*</sup>) liefern jetzt die Differentiale:

$$d(\beta_0' D_0) = +\frac{A}{4} \beta_{(z)}'^2 \frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} dz;$$

$$d(\beta_1' D_1) = -\frac{A}{4} \beta_{(z)}'^2 \frac{1}{\sqrt{E - \Phi(z)}} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} dz.$$

Differenziert man diese Gleichungen mehrmals nach  $z$  und setzt dann  $z = 0$  und nach (89)  $\beta_{(z=0)} = 1$ ;  $(d\beta')_{z=0} = 0$  und beachtet, daß dann auch

$dD = d(\beta' D)$ ;  $d^2 D = d^2(\beta' D)$ ;  $d^3 D = d^3(\beta' D) - 3 \cdot d^2 \beta' \cdot dD$  ist, so erhält man hierdurch die Differentialquotienten von  $D$  an der Stelle  $z = 0$  und mit diesen die Reihendarstellung für  $D_0$  und  $D_1$ :

$$(99_{11}) \quad \begin{cases} D_0 = \frac{A}{4 n_0} \left[ z_0 \left( \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \right)_{z=0} + \frac{z_0^3}{2} \left\{ \frac{d^3 \Phi}{dz^3} + \frac{A}{2 n_0^2} \frac{d^4 \Phi}{dz^4} \frac{d \Phi}{dz} \right\}_{z=0} \right. \\ \quad \left. + \frac{z_0^3}{6} \left\{ \frac{d^4 \Phi}{dz^4} + \frac{A}{n_0^2} \frac{d^5 \Phi}{dz^5} \frac{d \Phi}{dz} + \frac{3 A^2}{4 n_0^4} \frac{d^6 \Phi}{dz^6} \left( \frac{d \Phi}{dz} \right)^2 \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \frac{3 A}{4 n_0^2} \left( \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \right)^2 \right\}_{z=0} + \dots \right]. \end{cases}$$

$$(99_{13}) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 = -\frac{A}{4n_0} \left[ z_1 \left( \frac{d^3 \Phi}{dz^2} \right)_{z=0} + \frac{z_1^2}{2} \left\{ \frac{d^3 \Phi}{dz^3} + \frac{A}{2n_0^2} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \frac{d \Phi}{dz} \right\}_{z=0} \right. \\ \quad + \frac{z_1^3}{6} \left\{ \frac{d^4 \Phi}{dz^4} + \frac{A}{n_0^2} \frac{d^3 \Phi}{dz^3} \frac{d \Phi}{dz} + \frac{3A^2}{4n_0^4} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \left( \frac{d \Phi}{dz} \right)^2 \right. \\ \quad \left. \left. + \frac{1}{4} \frac{A}{n_0^2} \left( \frac{d^4 \Phi}{dz^4} \right) \right\}_{z=0} + \dots \right]. \end{array} \right.$$

Setzen wir nun diese Brechkräfte nach Formel (96) zusammen und beachten, daß wir hierbei die Werte  $D_1$ ;  $D_2$ ;  $\beta_0'$ ;  $\beta_1'$ ;  $\beta_2' = \beta_m'$ , der Formel (96) zu ersetzen haben durch  $D_0$ ;  $D_1$ ;  $1$ ;  $\frac{1}{\beta_0'}$ ;  $\frac{\beta_1'}{\beta_0'}$  in den hier benutzten Bezeichnungen, so wird

$$(100) \quad D = \frac{D_0}{\beta_1'} + \frac{D_1}{\beta_0'}.$$

Weiter erhalten wir für die Lage der Hauptpunkte nach (97), (97\*):

$$(100^*) \quad z_H = \zeta_0 + n \frac{\beta_1' - \beta_0'}{\beta_1' \cdot D}; \quad z_{H'} = \zeta_1 + n' \frac{\beta_1' - \beta_0'}{\beta_0' \cdot D}.$$

Die Gl. (100), (100\*) stimmen überein mit den entsprechenden vereinfachten Ausdrücken der Gl. (95).

Für die Anwendung der hier entwickelten Formeln gilt hinsichtlich der Konvergenz das bereits am Schluß von § 19 Gesagte.

Es ist beabsichtigt, in einer späteren Arbeit die hier entwickelten Formeln und Überlegungen auf praktische Beispiele anzuwenden und auf Abbildungsgüte bzw. Abbildungsfehler weiterzuführen.

#### Zusammenfassung

Es werden die Differentialgleichungen der Elektronenstrahlen für das paraxiale Gebiet sowie allgemein aufgestellt und für den ersten Fall die Integration in Reihendarstellung (allgemein) und für einige spezielle Fälle in geschlossener Form durchgeführt. Es wird gezeigt, wie man eine Potentialverteilung berechnet, die einer vorgegebenen Brennweite der elektrischen Linse entspricht. Ferner werden Formeln zur Berechnung der Lage der Brennpunkte und Hauptpunkte einer gegebenen Potentialverteilung aufgestellt. Formeln, die von Gullstrand für heterogene optische Medien entwickelt wurden, werden auf die Elektronenoptik übertragen.

Berlin, Optisches Institut der Technischen Hochschule, im September 1932.

(Eingegangen 13. Oktober 1932)

## Namenregister zum Jahrgang 1932

### 5. Folge, Band 12—15

#### A

Adam, M., Der Poleffekt des Eisens 15, 568. — Das Eisenspektrum in der Wasserstoffflamme 15, 613.  
 Akulov, N. u. Brüchatov, N., Über eine Methode zur quantitativen Untersuchung der Walztextur 15, 741.  
 Akulov, N. u. Degtjar, M., Über die komplizierte magnetische Struktur der ferromagnetischen Einkristalle 15, 750.  
 Arkadiew, W., Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. M. Wien zu meinem Aufsatz „Über die Permeabilität bei Hochfrequenz“ 13, 636.  
 Arvidson, G., Wellenlängenmessungen in den höheren Funkenpektren von Blei und Wismut im äußersten Ultraviolett 12, 787.

#### B

Bandow, F., Die Ioneneinwanderung in Steinsalzkristalle, untersucht mittels Phosphoreszenz 12, 385.  
 Bartels, H., Über den Umladungsquerschnitt von Wasserstoffmolekülen gegenüber langsamem Protonen 13, 373.  
 Beattie, J. A. u. Bridgman, O. C., Über Messungen mit der Kolbendruckwaage. II. Einfluß von Alterung und Ölviskosität auf die Waagenkonstante; Beziehung zwischen dem wirksamen und dem wirklichen Durchmesser des Kolbens 12, 827.  
 Becker, A. u. Vogt, K., Innere Reibung und Dichte in Flammen 14, 241.  
 von Békésy, G., Zur Theorie des Hörens bei der Schallaufnahme durch Knochenleitung 13, 111. — Über den Einfluß der durch den Kopf und den Gehörgang be-

wirkten Schallfeldverzerrungen auf die Hörschwelle 14, 51.  
 Benecke, H., Über die günstigste Raumdämpfung 15, 259.  
 Benndorf, H. u. Burger-Scheidlin, F., Theorie des ballistischen Elektrometers 12, 265.  
 Bergmann, L. u. Doerfel, W., Messungen im Strahlungsfeld einer in ihrer Grundschwingung erregten Vertikalantenne zwischen zwei vollkommen leitenden Ebenen 13, 409.  
 Betz, O., Über die Absorption kurzer elektrischer Wellen in ionisierten Gasen, ein Versuch zum Nachweis der langwelligen Strahlung des Wasserstoffatoms 15, 321.  
 Binkele, H. E., Über die gas theoretischen Wirkungsquerschnitte der Moleküle. II. Ihr Zusammenhang mit anderen Größen 15, 729.  
 Boas, W. u. Rupp, E., Über Elektronenbeugung an reinem und an passivem Eisen 13, 1.  
 Boehme, W. vgl. Tammann 12, 820; 15, 317.  
 Braun, G., Die ebene kompressible Potentialströmung als Variations- und Eigenwertproblem 15, 645.  
 Bridgman, O. C. vgl. Beattie, J. A. 12, 827.  
 Brion, H., Über Drehmagnetisierung 15, 167.  
 Broili, H., Ferromagnetismus und elektrische Eigenschaften. V. Mitteilung: Der thermomagnetische Effekt im longitudinalen Magnetfeld, beobachtet an Nickel und Eisen 14, 259.  
 Brüchatov, N. vgl. Akulov, N. 15, 741.  
 Brüche, E. u. Johannson, H., Kinematographische Elektronenmikroskopie von Oxydkathoden 15, 145.

Burger-Scheidlin, F., Methode zur Messung der im Geiger-schen Zählrohr abgegebenen Elektrizitätsmengen 12, 283.  
Burger-Scheidlin, F., vgl. Benndorf, H. 12, 265.

## C

van Cittert, P. H., Zur Messung der Kohärenzlänge mit dem Multiplex-Interferenzspektroskop von Gehrke und Lau 13, 753.  
Claus, B., Sperrsichtuntersuchungen an Carborundkristallen 14, 644.  
Clausing, P., Über die Strömung sehr verdünnter Gase durch Röhren von beliebiger Länge 12, 961. — Eine Bemerkung zu der Molekularströmung 14, 129. — Eine Bemerkung zu einem Gaedeschen Strömungsversuch 14, 134.  
Collenbusch, H., Untersuchungen an Ultra-Kurzwellenröhren 13, 191.  
Czerlinsky, E., Über magnetische Sättigung 13, 80.  
Czerny, M., Über die Brownsche Molekularbewegung als Grenze der Meßtechnik 12, 993.

## D

Dames, W., Über die Beugung langsamer Elektronen an Ionenkristallen mit besonderer Berücksichtigung des inneren Potentials von Calcit und Aragonit 12, 185.  
Degtiar, M. vgl. Akulov, N. 15, 741.  
Dehn, K. vgl. Fischer, F. 15, 109.  
Deutschbein, O., Die linienhafte Emission und Absorption der Chromphosphore I. 14, 712; II. 14, 729.  
Doerfel, W. vgl. Bergmann, L. 13, 409.  
Dostal, H., Betrachtungen zur Erklärung des Weltraumechos, des Polarlichtes und der magnetischen Störungen, I. Mitteilung 14, 971.  
Durau, F. u. Teckentrup, C. H., Über Adsorption von Gasen an vakuumgeschmolzenem Elektrolyteisen 12, 927.

## E

Ellenberger, G., Intensitätsmessungen an Ramanlinien 14, 221.  
Englert, E., Ferromagnetismus und elektrische Eigenschaften. VI. Mitteilung: Longitudinale und transversale ferromagnetische Widerstandsänderung 14, 589.

Evert, H., Über die Emission des Praseodyms in Erdalkaliphosphoren I. 12, 107; II. 12, 137.

## F

Fahlenbrach, H., Über die Variabilität der magnetischen Ionennmomente einiger Elemente der Eisenreihe 13, 265. — Bemerkung zu vorstehender Arbeit 14, 521. — Über eine Konzentrationsabhängigkeit des Magnetismus von  $\text{Cr}^{+++}$  in wäßriger violetter  $\text{Cr}(\text{NO}_3)_3$ -Lösung. Beziehung zwischen den Konstanten  $C$  und  $\Theta$  des Weißschen Gesetzes 14, 524.

Fischer, F., Dehn, K. u. Sustmann, H., Über die Steigerung der Thermokräfte von Oxyden durch Verwendung von Mehrstoffoxyden 15, 109.

Fischer, J., Zur Berechnung von Strahlungsempfängern 15, 861.

Franke, G., Zur Diffusion von Alkoholen 14, 675.

Franz, H. vgl. Meißner, W. 13, 505, 555, 967.

Fredlund, E., Über den Meßbereich des Knudsen'schen Manometers 13, 802. — Untersuchungen über das Knudsenmanometer 14, 617.

Fröhlich, H., Theorie der Sekundärelektronenemission aus Metallen 13, 229.

Fucks, W., Spannungseffekt bei elektrolytischen Lösungen und Kathodenoszillograph 12, 306.

## G

Gans, R., Über das magnetische Verhalten isotroper Ferromagnete 15, 28.

Gans, R. u. v. Harlem, J., Widerstandsänderung ferromagnetischer Kristalle 15, 516.

Gebelein, H., Über den unsymmetrischen, schweren Kreisel 12, 889.

Gerlach, W., Ferromagnetismus und elektrische Eigenschaften, IV. Mitteilung 12, 849. — Druckfehlerberichtigung 13, 264. — Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von E. Englert, betreffend die Widerstandsänderung in Eisenkristallen 14, 613.

Gerver, A. J., vgl. Michels u. Nijhoff 12, 562.

Geyer, W., Verfeinerung der Brückenmethode zur Messung von Elektrolytwiderständen bei hohen Frequenzen 14, 299.

Glocker, R., Über die Existenz von Resistenzgrenzen bei Mischkristallen mit ungeordneter Atomverteilung 14, 40.

Goens, E. u. Grüneisen, E., Elektrizitäts- und Wärmeleitung in Zink- und Cadmiumkristallen 14, 164.

Goens, E., Über die Biegungs- und Drillungsschwingungen eines dünnen kreiszylindrischen Kristallstabes von beliebiger kristallographischer Orientierung 15, 455. — Berichtigung 15, 902.

Görlach, P., Der äußere lichtelektrische Effekt an Flüssigkeiten. Bestimmung der langwelligen Grenze des Wassers 13, 831.

Grossmann, E., Schallabsorptionsmessungen in Gasen bei hohen Frequenzen 13, 681.

Grüneisen, E., vgl. Goens, E., 14, 164.

Guillary, P., Elektrisches und optisches Verhalten von Halbleitern, VI. Leitfähigkeitsmessungen an Pulvern 14, 216.

Günther, N., Untersuchung der Wirkung mechanischer und elektrischer Kraftfelder auf die Doppelbrechung des Quarzes 13, 783.

## H

Hahnkamm, E., Die Beruhigung störend schwingender Wellenlager bei konstanter Erregerfrequenz 14, 683.

Hallén, E., Bemerkungen zu einer Arbeit von K. F. Lindman, „Über die elektrischen Eigenschwingungen stabförmiger Leiter“ 14, 586.

Halpern, O., Über magnetische Sättigungserscheinungen bei sehr tiefen Temperaturen 12, 169. — Notiz über die Rotationspolarisation ferromagnetischer Körper 12, 181.

Hanle, W., Untersuchungen über die zirkulare Polarisation der Ramanlinien, II. Teil, 15, 345.

v. Harlem, J., Über drehende Hysterese 14, 667.

v. Harlem, J., vgl. Gans, R. 15, 516.

Hasché, E., Über das Absorptionsvermögen der Schwärzungen und Weißungen einiger Strahlungsmeaser, III. Teil 14, 342.

Hasselbeck, W., Über das Verhalten elektrischer Wellen beim Durchgang durch ionisierte Gase 12, 477.

Heisenberg, W., Theoretische Überlegungen zur Höhenstrahlung 13, 430.

Henning, H. J., Die Absorptionspektren von Kohlendioxyd, Kohlenmonoxyd und Wasserdampf im Gebiet von 600 bis 900 Å 13, 599. — Berichtigung zu vorstehender Arbeit 14, 856.

Hermann, H., Das Querdruckelektrometer 12, 990.

Herrmann, A., Untersuchungen am Absorptionsspektrum des Stickstoffdioxyds 15, 89.

Herzberg, G., Bandenspektrum, Prädissoziation und Struktur des  $P_2$ -Moleküls 15, 677.

Heuse, W. u. Otto, J., Die Übereinstimmung der gesetzlichen mit der thermodynamischen Temperaturskala unterhalb 0° 14, 181. — Gasthermometrische Bestimmung einiger Fixpunkte unterhalb 0° mit Tensions- und Widerstandsthermometern, II 14, 185.

Hoppe, H., Die Strahlung glühender Oxyde und Oxydgemische im sichtbaren Spektralgebiet 15, 709.

## I

Ising, G., Natürliche Empfindlichkeitsgrenzen bei Meßinstrumenten. III. Das praktische Erreichen der Empfindlichkeitsgrenze des Galvanometers 14, 755.

## J

Johannesson, J., Eine neue Sondenmethode zur Untersuchung der Vorgänge in Gasentladungen 13, 953.

Johansson, H., vgl. Brüche, E. 15, 145.

## K

Kantorowicz, O., Zur Leitfähigkeit gepreßter Metallpulver 12, 1. Kappler, E., Experimentelle Untersuchungen über den zeitlichen Verlauf der Brownschen Bewegung einer Drehwaage 15, 545.

Keck, P., Der Faradayeffekt in ionisierten Gasen bei Wellen von 4 cm Länge 15, 903.

Kehren, E., Die Anwendung der konformen Abbildung in der Elektrostatisik 14, 367.

Kipnis, M., vgl. Schuster, K. 14, 123.

Kipphahn, E., Über die volle differentielle Sekundärstrahlung in Luft für Elektronen mittlerer Geschwindigkeit 12, 401.

Kirchner, F., Zur Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons aus Geschwindigkeitsmessungen 12, 503. — Berechnung der Atomkonstanten  $e, h, N$  aus der Rydbergzahl, der spezifischen Elektronenladung und den Messungen der kurzweligen Grenze des Röntgenspektrums 13, 59. — Über die Zerstreuung von schnellen Kathodenstrahlen in Einkristallen 13, 38.

Kirschbaum, H., Intensitätsverhältnis im Heliumspektrum bei Überlagerung von Kanalstrahlbewegung und elektrischem Feld 14, 448.

Klemperer, O., Über die unelastischen Stöße schneller Elektronen 15, 361.

Kneschke, A., Über die Bewegung von Wirbeln in einem einseitig begrenzten Kanal 14, 655.

Kneser, H.O., Berichtigung zur Abhandlung: „Die Dispersion hochfrequenter Schallwellen in  $\text{CO}_2$ “ 12, 1015.

Knoll, M. und Ruska, E., Beitrag zur geometrischen Elektronenoptik. I. 12, 607. II. 12, 641.

Kömmnick, J., Über Vorgänge im Quecksilberbogen 15, 273.

Koenigsberger, J., Mitführung langsamer positiver Teile durch Kanalstrahlen 13, 780.

Kollath, R., vgl. Ramsauer, C. 12, 529, 837.

Kollath, R., Der Einfluß der Winkelverteilung gestreuter Elektronen auf die Messung des Wirkungsquerschnittes 15, 485.

v. Körösý, F. u. Selényi, P., Photozelle und Lichtelement 13, 703.

Kraus, A., Richtungsverteilung der durch ultraviolettes polarisiertes Licht am Kaliumatom ausgelösten Elektronen 14, 103.

Kretschmann, E., Beitrag zur Theorie des elektrischen Widerstandes und des Supraleitfähigkeit der Metalle 13, 564.

Kroebel, W., Über die Erzeugung ungedämpfter Schwingungen von Dezimeterwellenlänge in der Rückkopplungsschaltung. I. 14, 80.

Kuhn, F., Die Potentialdifferenz zwischen glühenden Wolfram-elektroden verschiedener Temperatur 15, 825.

Kühner, R., Das Spektrum der erregenden Absorption der Lenardphosphore 13, 873.

Külb, W., Die Schwächung sichtbarer ultraroter Strahlung durch künstliche Nebel und ihre Wirkung auf die Sicht. Berichtigung und Bemerkungen 15, 707.

Küstner, H., Die Elektronenemission der Metalle unter Einwirkung der Röntgenstrahlen 14, 857. — Berichtigung 15, 860.

**L**

Ladenburg, R., Untersuchungen über die physikalischen Vorgänge bei der sogenannten elektrischen Gasreinigung. III. Teil 14, 510.

Lanezos, C., Zur Frage der regulären Lösungen der Einsteinischen Gravitationsgleichungen 13, 621.

Lange, W., Stationäre Wirbel in scherenden Flüssigkeitsströmungen 13, 9.

Lau, E. u. Reichenheim, O., Über die verschiedenen Arten der Lichtanregung in der Gasentladung 12, 52. — Anhang; (Lau, E.) Struktur der Hg-Linie 5461 12, 66. — Über sichtbare, durch Schumannstrahlen angeregte Phosphoreszenz des Fußspats 12, 69.

Le Blanc, M. u. Wehner, G., Untersuchungen über die Umwandlungen in fester Phase beim System Kupfer-Gold 14, 481.

Lederer, E. L., Durchgang der Elektrizität durch metallische Haardrähte 15, 842.

Leo, W., Elektrisches und optisches Verhalten von Halbleitern. VII. Lichtelektrische Eigenschaften v. Halbleitersperrschichten 15, 129. Lichtenberger, F., Untersuchung der Magnetostriktion und der Magnetisierung von Einkristallen der Eisen-Nickelreihe 15, 45.

Linde, J. O., Elektrische Eigenschaften verdünnter Mischkristalllegierungen. II. Widerstand von Silberlegierungen 14, 353. — III. Widerstand von Kupfer-Goldlegierungen. Gesetzmäßigkeiten der Widerstandserhöhungen 15, 219. — Die Gitterkonstanten der CuPd-Mischkristalle 15, 249.

Lindmann, K. F., Über die elektrischen Eigenschwingungen stabförmiger Leiter 13, 358. — Erwiderung auf Hrn. Halléns Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über die elektrischen Eigenschwingungen stabförmiger Leiter“ 15, 127.

Loeck, V., Über Intensitätsmessung von Röntgenstrahlen mittels Auszählung der Lichtquanten 15, 527.

Lompe, A. u. Seeliger, R., Der Gradient der positiven Säule in Edelgasen 15, 300.

**M**

Malsch, J., Über Absorptionsmessungen in reinen Flüssigkeiten und Elektrolytlösungen im Gebiet kurzer elektrischer Wellen nach einer neuen Methode 12, 865.

Maué, A. W., Das kontinuierliche und kontinuierlich-diskrete Röntgenspektrum nach der Theorie von Kramers und nach der Wellenmechanik 13, 161.

Mc Lachlan, N. W., Verteilung der Schallstrahlung von Kreisscheiben mit Knotenlinien 15, 422. — Die ausgestrahlte Schallleistung von Kreisscheiben mit Knotenlinien 15, 440.

v. Meibom, R. u. Rupp, E., Eine  $h/e$ -Bestimmung mittels Elektronenbeugung 13, 725.

Meißner, W., Messungen mit Hilfe von flüssigem Helium. XVII. Widerstand von Blei im Magnetfeld unterhalb der Sprungtemperatur 13, 641.

Meißner, W., Franz, H. u. Westerhoff, H., Messungen mit Hilfe von flüssigem Helium. XIV. Systematische Untersuchung einiger Legierungsreihen in bezug auf Supraleitfähigkeit 13, 505. — XV. Widerstand von Barium, Indium, Thallium, Graphit und Titan in tiefen Temperaturen 13, 555. — XIX. Untersuchung der Legierungsreihen Pb-Tl und Pb-Bi in bezug auf Supraleitfähigkeit 13, 967.

Meyer zur Capellen, W., Die Theorie des Frahm'schen Schwingungsdaueranzeigers 15, 1.

Michels, A., Nijhoff, G. P. u. Gerver, A. J., Isothermelmessungen von Wasserstoff zwischen 0 und  $100^{\circ}$  bis 1000 Atmosphären 12, 562.

Möller, Chr., Zur Theorie des Durchgangs schneller Elektronen durch Materie 14, 531.

Moser, H., Eine statische Methode für präzise Dampfdruckmessungen bei höheren Temperaturen

und ihre Anwendung zur Sicherung des Hundertpunktes der Temperaturskala **14**, 790.

Mrowka, B., Zur Theorie der Spektrallinienverbreiterung nach der Wellenmechanik **12**, 753.

Müller, E., Die Emission von glühendem Platin in Gasen, im besonderen in Joddampf und Chlor **14**, 831.

Münster, C., Unähnliche Abbildung und Ausmessung von Nichtselbstleuchtern. Ein Beitrag zum Äquivalenzprinzip **15**, 619.

### N

Neubert, F. vgl. Tammann **15**, 317.

Nijhoff, G. P. vgl. Michels **12**, 562.

Nikuradse, A., Die Abhängigkeit der Ionisierungszahl von der Feldstärke und die mittlere „Ionisierungsfeldstärke“ in Flüssigkeiten **13**, 851.

Nitzsche, A., Über die Abhängigkeit der Höchstgeschwindigkeiten und der Austrittsarbeit lichtelektrischer Elektronen an Zn-Einkristallbruchflächen von der Flächenorientierung **14**, 463.

Noether, F. vgl. Watzmann, E. **13**, 212.

### O

Ochsenfeld, R., Das Auftreten des Ferromagnetismus im System Mangan-Stickstoff **12**, 353.

Otto, J. vgl. Heuse, W., **14**, 181, 185.

### P

Paschen, F., Erweiterung der Spektren Al II, MgI, BeI und Al I **12**, 509.

Peierls, R., Zur Frage des elektrischen Widerstandsgesetzes für tiefe Temperaturen **12**, 154. — Zur Theorie der Absorptionspektren fester Körper **13**, 905.

Petržilka, V., Turmalinresonatoren bei kurzen und ultrakurzen Wellen **15**, 72. — Längs- und Biegungsschwingungen von Turmalinplatten **15**, 881.

Picht, J., Beiträge zur Theorie der geometrischen Elektronenoptik **15**, 926.

### R

Ramberg, W., Über den Mechanismus des elektrischen Lichtbogens **12**, 319.

Ramsauer, C. u. Kollath, R., Die Winkelverteilung bei der Streuung langsamer Elektronen an Gasmolekülen. II. Fortsetzg. **12**, 529. III. Fortsetzg. u. Schluß **12**, 837.

Reichenheim, O. vgl. Lau, E., **12**, 52 u. 69.

Reddemann, H., Wärmeleitvermögen, Wiedemann-Franz-Lorenzsche Zahl und Thermokraft von Quecksilbereinkristallen **14**, 139.

Reusse, W., Eine Methode zur Erzeugung langsamer Kanalstrahlen **15**, 252. — Energieverluste langsamer Kanalstrahlen beim Durchgang durch feste Körper **15**, 256.

Rindfleisch, H., Über den Einfluß von Gasen auf Barkhausen-Schwingungen **14**, 273.

Ritschl, R., Eine lichtstarke Anregung von Spektren im elektrischen Vakuumofen durch Elektronenstoß kleiner Energie **13**, 337.

Rohde, L., Gasentladungen bei sehr hohen Frequenzen **12**, 569. Rosenberg, R. L., Wirkungsquerschnitte von Atomen gegenüber langsamem und schnellen Elektronen **15**, 757.

Rössiger, M., Die elastischen Schwingungen einer Masse, die durch eine Blattfeder gehalten wird **15**, 735.

Rostagni, A., Über die bei der Totalreflexion im zweiten Medium strömende Energie **12**, 1011.

Rüchard, E., Bemerkung über Reichweite und Ionisationsvermögen von H- und  $\alpha$ -Strahlen **12**, 600.

Rühenbeck, A., vgl. Tammann, G. **13**, 63.

Ruhnke, M., Elektrische Ströme aus Glühkathoden in Gasen und

Dä  
14,  
Rup  
Rup  
zah  
Ele

Rup  
13,  
Rup  
me  
L.

den  
Ph  
fin  
fre

14,  
Rus

641

Sach  
Eig  
Ne

Seel  
300

Selé  
13,

Seif  
Qu

pro  
Sm

bil  
sü

Sust  
15,

Sven  
zepl  
Pd

Sch  
se

Sch  
Fl

Sch  
de

Er

Sch  
str

Pr

Sch  
eff

ke

81

Dämpfen von Atmosphärendruck 14, 881.

Rupp, E. vgl. Boas, W. 13, 1. Rupp, E. Zur Deutung der halbzähligen Interferenzen bei der Elektronenbeugung 13, 101.

Rupp, E. vgl. v. Meibom, R. 13, 725.

Rupp, E. u. Schmidt, F., Bemerkung zu der Arbeit von L. Wesch „Über den Nachweis der  $K$ -Absorptionskanten an Phosphoren und eine neue empfindliche Methode für die Hochfrequenzstrahlspktralanalyse“ 14, 413.

Ruska, E. vgl. Knoll, M. 12, 607; 641.

### S

Sachse, H., Über die elektrischen Eigenschaften von Staub und Nebel 14, 396.

Seeliger, R. vgl. Lompe, A. 15, 300.

Selényi, P. vgl. F. v. Körösy 13, 703.

Seifarth, H., Zur relativistischen Quantendynamik des Mehrkörperproblems 14, 321.

Sommermeyer, K., Die Energiebilanz der positiven Edelgasäule 13, 315.

Sustmann, H. vgl. Fischer, F. 15, 109.

Svensson, B., Magnetische Suszeptibilität und elektrischer Widerstand der Mischkristallreihen Pd-Ag und Pd-Cu 14, 699.

### Seh

Schaffernicht, W. vgl. Tomaszek, R. 15, 787.

Scharf, K., Der Faradayeffekt in Flüssigkeitsgemischen 13, 377.

Schellenberg, O., Zur Analyse der ultravioletten Emissionen der Erdalkaliphosphore 13, 249.

Scherzer, O., Über die Ausstrahlung bei der Bremsung von Protonen und schnellen Elektronen 13, 137.

Schiele, J., Über den Spannungseffekt der Leitfähigkeit bei starken und schwachen Säuren 13, 811.

Schlichting, H., Über die Stabilität der Couetteströmung 14, 905.

Schmid, R., Über den Einfluß eines überlagerten magnetischen Feldes auf das dielektrische Verhalten einiger fester, flüssiger und gasförmiger Körper 14, 809. Schmidt, F., Zur Analyse der Bandenspektren der Lenardphosphore 12, 211.

Schmidt, F. vgl. Rupp, E. 14, 413.

Schniedermann, J., Lichtelektrischer und thermoelektrischer Effekt wasserstoffbeladener Palladium-Silber- und Palladium-Goldlegierungen 13, 761.

Schönwald, B., Elektrisches und optisches Verhalten von Halbleitern. VIII. Ein Verfahren zur Messung lichtelektrischer Ströme in Halbleitern 15, 395.

Schuch, E., Die Durchlässigkeit dünner Platinschichten im Wellenlängenbereich von 0,25 bis 2,5  $\mu$  13, 297.

Schumann, W. O. Stromleitung in einem Dielektrikum, in dem die Stromionen aus einer Elektrode stammen 15, 843.

Schuster, K. u. Kipnis, M., Über die Verwendung von akustischen Filtern als Lärmdämpfer 14, 123.

### St

Stenzel, H. u. Strutt, O., Über die Schallstrahlung einer mit Knotenlinien schwingenden Kreismembran 12, 528.

Stockmeyer, W., Untersuchungen zur Anwendung der Ionisationsmeßmethode bei Röntgenstrahlen 12, 71.

Strutt, O. vgl. Stenzel, H. 12, 528.

Stücklen, H., Über eine einfache Methode zur Bestimmung des Intensitätsverhältnisses zweier benachbarter Spektrallinien 12, 701.

### T

Tammann, G. u. Boehme, W., Die Oberflächenspannung von Goldlamellen 12, 820.

Tammann, G. u. Rühenbeck, A., Die spezifischen Volumen des Wassers zwischen 26 und 650°, die des Äthyläthers und des Äthylalkohols zwischen 20 und 400° bei Drucken von 1 bis 2500 kg/cm² 13, 63.

Tammann, G., Neubert, F. u. Boehme, W., Der Einfluß der Kaltbearbeitung auf die Temperatur des Beginns der Grauglut 15, 317.

Teckentrup, C.H. vgl. Durau, F. 12, 927.

Teichmann, H., Das elektrische Verhalten von Grenzschichten 13, 649.

Teves, G. A., Untersuchungen über untere Grenzempfindlichkeit technischer Kaliumzellen und deren Eignung zur lichtelektrischen Messung von  $\alpha$ -Präparaten 14, 57.

Thiele, E., Untersuchungen über den Dampfdruck des Natriums 14, 937.

Tomasek, R. u. Schaffernicht, W., Untersuchungen über die zeitlichen Änderungen der Schwerkraft. I. Messungen mit dem Bifilargravimeter 15, 787.

Trautz, M., Die Reibung, Wärmeleitung und Diffusion in Gasen und Gasmischungen. XXI. Absoluter  $\eta$ -Wirkungsquerschnitt, molekularetheoretische Bedeutung der kritischen Temperatur und Berechnung kritischer Drucke aus  $\eta$  15, 198.

### V

Valle, Giorgio, Über die Zündung der Glimmentladung 13, 732.

Vogt, E., Zum Dia- und Paramagnetismus in metallischen Mischkristallreihen 14, 1.

Vogt, K., Untersuchung über die Elektronenbewegung in Flammen 12, 433.

Vogt, K., vgl. Becker, A. 14, 241.

Völkli, A., Elektrisches und optisches Verhalten von Halbleitern. V. Über ein Verfahren zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit von Pulvern 14, 193.

### W

Walter, B., Über Verlagerungen der Einschlagstelle eines längeren elektrischen Funkens ohne Veränderung der Funkenstrecke 13, 483.

Waetzmann, E. und Noether, F., Über akustische Filter 13, 212.

Wehner, G. vgl. Le Blanc, M. 14, 481.

Weidner, V., Die photographische Wirkung langsamer Kathodenstrahlen 12, 239.

Wesch, L., Verfärbung und Nachleuchten der Carbonat- und Oxydphosphore 12, 730. — Über den Nachweis der K-Absorptionskanten an Phosphoren und eine neue empfindliche Methode für die Hochfrequenzstrahlspetralanalyse 12, 743.

Westerhoff, H. vgl. Meißner, W. 13, 505, 555, 967.

Wierl, E., Elektronenbeugung und Molekülbau (II) 13, 453.

### Z

Zahradníček, J. u. Žák, Z., Saitenoszillator 12, 662.

Žák, Z., vgl. Zahradníček, J. 12, 662.

Zeier, O., Durchschlaguntersuchungen in komprimierten Gasen und in flüssiger Kohlensäure 14, 415.

Zuber, K., Beitrag zur Kenntnis des Funkenpotentials in reines Gasen. Das Funkenpotential in reinem Wasserstoff 12, 665.

op-  
tern.  
Mes-  
hig-

ngen  
nge-  
ohne  
ecke

her,  
13,

M.

phi-  
Ka-

ach-  
und  
Über  
orp-  
und  
node  
pekk-

ner,  
und

Z,

, J.

inter-  
asen  
e 14,

ntnis  
inen  
al in

# Fortschritte und Probleme der Atomforschung

Von Dr. Johannes Stark, o. Universitäts-Professor für Physik.  
VIII, 112 Seiten mit 11 Figuren. 1931. 8°. Steif brosch. RM. 4.80

abzgl. 10% Notnachlaß = RM. 4.32

INHALT: Die großen Probleme der Physik in der Gegenwart. — Beiträge zur Optik der Atomstruktur. — Neue Erscheinungen betreffend Atomstruktur und Lichtemission. — Die Axialität der Valenzfelder des Kohlenstoff- und Stickstoffatoms. — Die Kausalität im Verhalten des Elektrons. — Über den Dogmatismus moderner Theorien in der Physik.

Zeitschrift für analytische Chemie: Stark hat in dem hier angezeigten Buch eine Reihe von Vorträgen und Aufsätzen zusammengefaßt, in denen er sich in den letzten Jahren zum Problem der Atomforschung geäußert hat. Trotz ihres zum Teil stark polemischen und subjektiven Charakters werden die Aufsätze Starks schon deshalb Interesse finden, weil sie viele Dinge einmal von einer anderen Seite her ansehen und dadurch den Leser zwingen, seinen eigenen Standpunkt gegenüber den Einwendungen Starks zu verteidigen oder abzuändern.

# Atomstrukturelle Grundlagen der Stickstoffchemie

Von Dr. Johannes Stark, o. Univ.-Professor für Physik  
VI, 44 Seiten mit 93 Figuren. 1931. 8°. Steif. brosch. RM. 3.90  
abzgl. 10% Notnachlaß = RM. 3.51

INHALT: 1. Teil: Allgemeine Erkenntnisse über Atomstruktur und Atombindung.  
2. Teil: Bildungsarten der Valenzelektronen des Stickstoffatoms.

Berichte über die gesamte Biologie, Abt. B. Physiologie: Johannes Stark macht in der vorliegenden Schrift den dankenswerten Versuch, die theoretische Entwicklung der Chemie in der bisherigen Richtung weiterzuführen. Bei dem augenblicklichen Stand der Atomforschung ist es für den experimentell arbeitenden Physiologen und Chemiker außerordentlich schwierig, der sich überstürzenden Entwicklung der Atomforschung zu folgen. Um so erfreulicher ist dieses Buch, das versucht, in Anpassung an allgemein bekannte und experimentell sicher begründete Erfahrungen dem Problem der Oberflächenstruktur näher zu kommen.

# Der Bau der Atome und das periodische System

Von Dr. Ivan Koppel, Professor an der Universität Berlin.  
VI, 174 Seiten mit 47 Abbildungen im Text u. auf 4 Tafeln. 1927.  
gr. 8°. V  
abzgl. 10% Notnachlaß = RM. 8.10, geb. RM. 9.45

Die Naturwissenschaften: In angenehmem und klarem Stil geschrieben, gibt das Buchlein eine Übersicht über die Grundtatsachen der modernen Atomvorstellung und endet mit einer Besprechung der Bohrschen Theorie des periodischen Systems an der Hand der bekannten Bohrschen und Stoner-Main-Smithschen Tabelle. Man darf wohl sagen, daß es dem Verfasser gelungen ist, den Chemikern einen Einblick darin zu geben, wie die theoretische Physik, sich stützend auf rein physikalische Versuche und Überlegungen, zu einem gewissen Verständnis der chemischen Grundtatsachen und der im periodischen System dargelegten Klassifizierung der chemischen Grundstoffe vorgedrungen ist. H. A. Kramers, Utrecht.

Das mit V bezeichnete Werk erschien in der Verlagsabteilung Leopold Voss

---

**Johann Ambrosius Barth / Verlag / Leipzig**

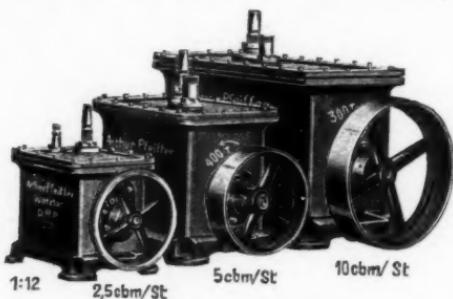




*Pfeiffer* 's

# Röntgen-Ölluftpumpen

mit **wiederum** erhöhter Saugleistung  
**DRP.**, aus Eisen, ohne Ölrückschlag



Große Saugleistung bis **10** cbm/St.  
Hohes Vakuum . . . bis  $10^{-5}$  mm Hg

## Modelle

für wissenschaftliche und technische Arbeiten

Saugleistungen 1—250 cbm/St.  
Vakua . . . . . 1— $10^{-6}$  mm Hg

## ARTHUR PFEIFFER, WETZLAR I

Gegründet 1890

Gegründet 1890

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Bernhard v. Ammon, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 b  
Printed in Germany

Metzger & Wittig Leipzig